数学補習２：講義プリント 02

♣ 不定積分の置換積分法

定理 2.1（置換積分の公式）

関数 $f(x)$ が連続，$x = g(t)$ が微分可能で，その導関数 $g'(t)$ が連続ならば，

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))g'(t)\,dt$$

証明. $f(x)$ の不定積分を $F(x)$ とすると

$$\frac{d}{dt}F(g(t)) = \frac{dF}{dx}\frac{dx}{dt} = F'(x)g'(t) = f(x)g'(t) = f(g(t))g'(t).$$

従って，

$$\int f(x)\,dx = F(x) = F(g(t)) = \int f(g(t))g'(t)\,dt$$

□

例. 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int (2x+1)^7\,dx$　　(2) $\displaystyle\int xe^{x^2}\,dx$　　(3) $\displaystyle\int x\sqrt{x^2-1}\,dx$

[解答]

(1) $t = 2x+1$ とおくと，　$dt = 2\,dx$.　従って，　$dx = \dfrac{1}{2}dt$ に注意すると

$$\int (2x+1)^7\,dx = \int t^7\frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\int t^7\,dt = \frac{1}{2}\frac{1}{8}t^8 = \frac{1}{16}t^8 = \frac{1}{16}(2x+1)^8.$$

(2) $t = x^2$ とおくと，　$dt = 2x\,dx$.　従って，　$x\,dx = \dfrac{1}{2}dt$ に注意すると

$$\int xe^{x^2}\,dx = \int e^t\frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\int e^t\,dt = \frac{1}{2}e^t = \frac{1}{2}e^{x^2}.$$

(3) $t = x^2-1$ とおくと，　$dt = 2x\,dx$.　従って，　$x\,dx = \dfrac{1}{2}dt$ に注意すると

$$\int x\sqrt{x^2-1}\,dx = \int \sqrt{t}\frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\int \sqrt{t}\,dt = \frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}(x^2-1)^{\frac{3}{2}}$$

置換積分のコツ　難しいと感じた箇所を t で置くとよい。

問. 次の不定積分を求めよ. (ヒント：置換積分)

(1) $\displaystyle\int (3x-2)^5\,dx$ (2) $\displaystyle\int x\cos(x^2+1)\,dx$ (3) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^3+2}\,dx$