

♣ 不定積分の部分積分法

定理 2.2 (部分積分の公式)

関数 $f'(x)$, $g(x)$ が連続ならば,

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx$$

証明.

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

なので

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x) dx + \int f(x)g'(x) dx.$$

従って,

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx$$

□

例. 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \log x dx$ (2) $\int x \cos x dx$

[解答]

$$\begin{aligned} (1) \quad \int \log x dx &= \int 1 \cdot \log x dx = \int x' \log x dx = x \log x - \int x(\log x)' dx \\ &= x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \log x - \int 1 dx = x \log x - x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \int x \cos x dx &= \int x(\sin x)' dx = x \sin x - \int x' \sin x dx \\ &= x \sin x - \int \sin x = x \sin x + \cos x \end{aligned}$$

部分積分のコツ

- 積分は難しいが微分は簡単な関数
- 微分すると1のように定数になる関数

を $g(x)$ として, 部分積分 $\int f'(x)g(x) dx$ をするとよい。

問. 次の不定積分を求めよ. (ヒント: 部分積分)

$$(1) \int x e^{-x} dx$$

$$(2) \int x^2 \log x dx$$

$$(3) \int \log(x+1) dx$$