

♣ 逆三角関数

三角関数は狭義の単調関数でないので、一般にその逆関数は存在しない。しかし、定義域を制限すれば逆関数が存在する。

定義 (逆三角関数).

$\sin x$ は区間 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ で連続で狭義単調増加,

$\cos x$ は区間 $[0, \pi]$ で連続で狭義単調減少,

$\tan x$ は区間 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ で連続で狭義単調増加

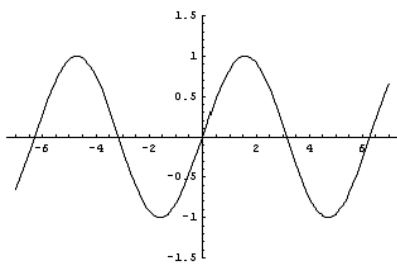
であるから、定理 7.1 より、それぞれ逆関数をもつ。このとき

$\sin x$ の逆関数を $\sin^{-1} x$ (アークサイン x と読む)

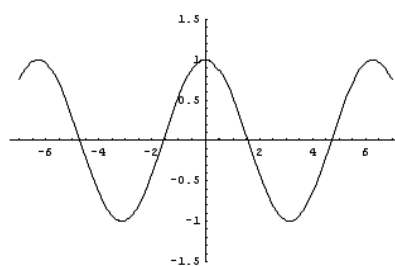
$\cos x$ の逆関数を $\cos^{-1} x$ (アークコサイン x と読む)

$\tan x$ の逆関数を $\tan^{-1} x$ (アークタンジェント x と読む)

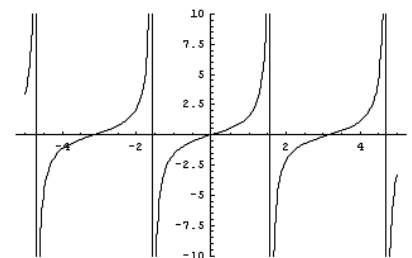
で表し、**逆三角関数**という。



$y = \sin x$

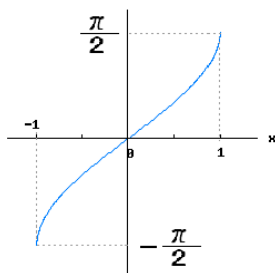


$y = \cos x$

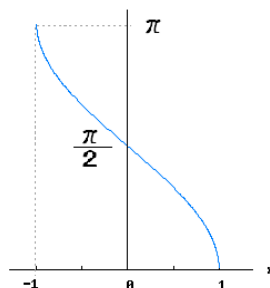


$y = \tan x$

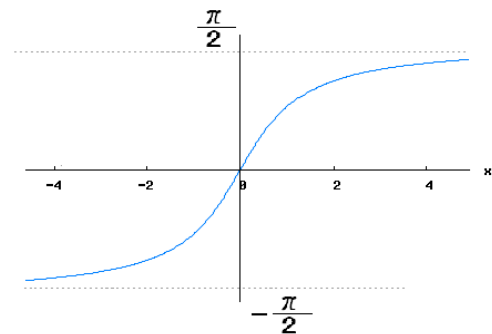
に対して



$y = \sin^{-1} x$



$y = \cos^{-1} x$



$y = \tan^{-1} x$

Remark $\sin^{-1} x$ は $\sin x$ の逆関数である。従って、 $\sin^{-1} x \neq \frac{1}{\sin x}$

つまり、 $\sin^{-1} x$ と $(\sin x)^{-1} = \frac{1}{\sin x}$ は意味が違うので注意すること。

ポイント (逆三角関数) 以下のように、逆三角関数は定義される。

$$y = \sin^{-1} x \iff x = \sin y, \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

$$y = \cos^{-1} x \iff x = \cos y, \quad 0 \leq y \leq \pi$$

$$y = \tan^{-1} x \iff x = \tan y, \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

例 7.3. $\sin^{-1} \frac{1}{2}$ の値を求めよ。

解). $y = \sin^{-1} \frac{1}{2}$ とおくと

$$y = \sin^{-1} \frac{1}{2} \iff \sin y = \frac{1}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

なので, $y = \frac{\pi}{6}$

従って, (答) $\sin^{-1} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ □

問 7.3 (1). $\sin^{-1} \frac{4}{5} + \sin^{-1} \frac{3}{5}$ の値を求めよ。

解). $\alpha = \sin^{-1} \frac{4}{5}$, $\beta = \sin^{-1} \frac{3}{5}$ とおくと

$$\alpha = \sin^{-1} \frac{4}{5} \iff \sin \alpha = \frac{4}{5}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\beta = \sin^{-1} \frac{3}{5} \iff \sin \beta = \frac{3}{5}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$$

なので, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$. このとき, $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ より

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

同様に

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

このとき, 加法定理より

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{4}{5} \frac{4}{5} + \frac{3}{5} \frac{3}{5} = \frac{16 + 9}{25} = 1$$

$0 < \alpha + \beta < \pi$ より, $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$

従って, (答) $\sin^{-1} \frac{4}{5} + \sin^{-1} \frac{3}{5} = \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ □