数学補習2：講義プリント06

♣ 三角関数と逆三角関数の導関数

定理 2.7.（三角関数の導関数） 次の公式が成り立つ。

[1] $(\sin x)' = \cos x$

[2] $(\cos x)' = -\sin x$

[3] $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

定理 3.4.（逆三角関数の導関数） 次の公式が成り立つ。

[1] $\left(\sin^{-1} x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (-1 < x < 1)$

[2] $\left(\cos^{-1} x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (-1 < x < 1)$

[3] $\left(\tan^{-1} x\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

定理 2.7 の証明.

(1)
$$\begin{aligned}(\sin x)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot 2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2} = \lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \\ &= \cos x\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}(\cos x)' &= \left\{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right\}' = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\cdot\left(x+\frac{\pi}{2}\right)' = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\sin x\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}(\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x}\end{aligned}$$

定理 3.4 の証明.

(1) $y = \sin^{-1} x \iff x = \sin y, \quad -\dfrac{\pi}{2} \leqq y \leqq \dfrac{\pi}{2}$ に注意すると，逆関数の微分法により

$$(\sin^{-1} x)' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d}{dy}\sin y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(2) $(\cos^{-1} x)' = \left(\dfrac{\pi}{2} - \sin^{-1} x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(3) $y = \tan^{-1} x \iff x = \tan y, \quad -\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$ に注意すると，逆関数の微分法により

$$(\tan^{-1} x)' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d}{dy}\tan y} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

問. 次の関数を微分せよ.

(1) $y = x^2 \cos x$　　(2) $y = \sin(3x-2)$　　(3) $y = \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$

(4) $y = \sin^{-1} 2x$　　(5) $y = \cos^{-1} \sqrt{x}$　　(6) $y = \tan^{-1} \dfrac{x}{a}$