# 数学補習2：講義プリント08

## ♣ 有理関数の不定積分

$P(x), Q(x)$ を多項式とするとき，有理関数 $\dfrac{Q(x)}{P(x)}$ の不定積分を求めることを考える。

**その１**　$\{Q(x)$ の次数$\} \geqq \{P(x)$ の次数$\}$ の場合

[**方法**]　$Q(x) \div P(x)$ を計算して，$Q(x) = P(x)S(x) + R(x)$ とする。このとき

$$\int \frac{Q(x)}{P(x)}\,dx = \int \frac{P(x)S(x) + R(x)}{P(x)}\,dx = \int S(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{P(x)}\,dx$$

となる。$S(x)$ は多項式なので，$\displaystyle\int S(x)\,dx$ は簡単に求めることができる。

では，$\displaystyle\int \frac{R(x)}{P(x)}\,dx$ はどうするのか？

**その２**　$\{R(x)$ の次数$\} < \{P(x)$ の次数$\}$ の場合の不定積分 $\displaystyle\int \frac{R(x)}{P(x)}\,dx$ の求め方

[**方法**]　$\{R(x)$ の次数$\} < \{P(x)$ の次数$\}$ なので，$\dfrac{R(x)}{P(x)}$ を

$$\frac{A}{(ax+b)^n} \quad や \quad \frac{Bx+C}{(ax^2+bx+c)^n}$$

の形に，つまり，部分分数へ分けて，不定積分 $\displaystyle\int \frac{R(x)}{P(x)}\,dx$ を求める。

**$\displaystyle\int \frac{R(x)}{P(x)}\,dx$ を求めるための基本的な公式**

(1)　$\displaystyle\int \frac{1}{x+b}\,dx = \log|x+b|, \qquad \int \frac{1}{(x+b)^n}\,dx = \int (x+b)^{-n}\,dx = \frac{1}{-n+1}(x+b)^{-n+1}$

$(n \geqq 2)$

(2)　$$\int \frac{1}{x^2+bx+c}\,dx = \int \frac{1}{(x+\frac{b}{2})^2 + c - \frac{b^2}{4}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{c-\frac{b^2}{4}}}\tan^{-1}\frac{x+\frac{b}{2}}{\sqrt{c-\frac{b^2}{4}}}$$

(3)　$$\begin{aligned}\int \frac{Bx+C}{x^2+bx+c}\,dx &= \int \frac{\frac{B}{2}(2x+b) - \frac{Bb}{2} + C}{x^2+bx+c}\,dx = \int \frac{\frac{B}{2}(x^2+bx+c)' - \frac{Bb}{2} + C}{x^2+bx+c}\,dx \\ &= \frac{B}{2}\int \frac{(x^2+bx+c)'}{x^2+bx+c}\,dx + \left(C - \frac{Bb}{2}\right)\int \frac{1}{x^2+bx+c}\,dx \\ &= \frac{B}{2}\log|x^2+bx+c| + \left(C - \frac{Bb}{2}\right)\int \frac{1}{x^2+bx+c}\,dx\end{aligned}$$

最後の項の不定積分は，(2) の形なので計算できる！

**例.** 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{x^2-3x+4}{x+1}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{x-5}{x^2-2x+5}\,dx$

**[解答]**

(1) $(x^2-3x+4)\div(x+1)$ を計算すると，$x^2-3x+4=(x+1)(x-4)+8$. 従って，

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2-3x+4}{x+1}\,dx &= \int \frac{(x+1)(x-4)+8}{x+1}\,dx = \int \left(x-4+\frac{8}{x+1}\right)dx \\
&= \int (x-4)\,dx + 8\int \frac{1}{x+1}\,dx \\
&= \frac{1}{2}x^2-4x+8\log|x+1|.
\end{aligned}$$

(2) このままでは積分できないので，部分分数に分ける。このとき，$(x^2-2x+5)'=2x-2$ に注意すると

$$\begin{aligned}
\int \frac{x-5}{x^2-2x+5}\,dx &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x-2)-4}{x^2-2x+5}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}(x^2-2x+5)'-4}{x^2-2x+5}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{(x^2-2x+5)'}{x^2-2x+5}\,dx - 4\int \frac{1}{x^2-2x+5}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\log|x^2-2x+5| - 4\int \frac{1}{(x-1)^2+4}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\log(x^2-2x+5) - 4\cdot\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x-1}{2} \\
&= \frac{1}{2}\log(x^2-2x+5) - 2\tan^{-1}\frac{x-1}{2}
\end{aligned}$$