数学補習2：講義プリント09

♣ 部分分数への分け方

その３　$\{R(x)$ の次数$\} < \{P(x)$ の次数$\}$ の場合で，$\dfrac{R(x)}{P(x)}$ の分母 $P(x)$ が因数分解できるときの不定積分 $\displaystyle\int \frac{R(x)}{P(x)}\,dx$ の求め方

[**方法**]　有理関数 $\dfrac{R(x)}{P(x)}$ を部分分数へ分ける。そのとき

分母が 1 次式のべき乗ならば，分子は定数 A
分母が 2 次式のべき乗ならば，分子は $Ax + B$

の分数へ分解する。その際，係数 $A,\ B, \cdots$ は分母を払い，両辺の係数を比較して求める。

例 3.4.　$\dfrac{4x-1}{x^2-3x+2} = \dfrac{4x-1}{(x-1)(x-2)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x-2}$　の形に分解する !!

両辺に $(x-1)(x-2)$ をかけて分母を払うと

$$\begin{aligned} 4x-1 &= A(x-2)+B(x-1) \\ &= Ax-2A+Bx-B \\ &= (A+B)x-2A-B. \end{aligned}$$

そこで，両辺の係数を比較すると

$$\begin{cases} A+B &= 4 \\ -2A-B &= -1. \end{cases}$$

この連立方程式を解くと

$$A=-3, \qquad B=7.$$

以上より

$$\begin{aligned} \int \frac{4x-1}{x^2-3x+2}\,dx &= \int \left(\frac{-3}{x-1} + \frac{7}{x-2} \right) dx \\ &= -3\int \frac{1}{x-1}\,dx + 7\int \frac{1}{x-2}\,dx \\ &= -3\log|x-1| + 7\log|x-2|. \end{aligned}$$

問. 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2 - x - 2}\,dx$　　　(2) $\displaystyle\int \frac{x - 2}{x^3 + x}\,dx$