数学補習2：講義プリント11

♣ 三角関数や無理関数の不定積分

置換積分法で, 有理関数の不定積分へ帰着できる形の不定積分がある。
$R(u,v)$ を u, v の（分数）式とするとき，以下のような置換積分を行うとよい。

三角関数の積分

- $\displaystyle\int R(\sin x)\cos x\,dx$ ならば $t=\sin x$ とおく
- $\displaystyle\int R(\cos x)\sin x\,dx$ ならば $t=\cos x$ とおく
- $\displaystyle\int R(\cos x,\sin x)\,dx$ ならば $t=\tan\dfrac{x}{2}$ とおく
- $\displaystyle\int R(\tan x)\,dx$ ならば $t=\tan x$ とおく

無理関数の積分

- $\displaystyle\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ ならば $t=\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ とおく（ただし，$ad-bc\neq 0$）
- $\displaystyle\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ ならば $\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}x$ とおく
（ただし，$a>0$）

例. 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \sin^2 x\cos x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int x\sqrt{x-4}\,dx$

[解答]

(1) $t=\sin x$ とおくと，$dt=\cos x\,dx$. 従って

$$\int \sin^2 x\cos x\,dx=\int t^2\,dt=\frac{1}{3}t^3=\frac{1}{3}\sin^3 x.$$

(2) $t=\sqrt{x-4}$ とおくと，$t^2=x-4$. 従って，$x=t^2+4$ なので，$dx=2t\,dt$. よって

$$\int x\sqrt{x-4}\,dx=\int (t^2+4)t\cdot 2t\,dt=\int(2t^4+8t^2)\,dt=\frac{2}{5}t^5+\frac{8}{3}t^3$$

$$=\frac{2}{5}(x-4)^{\frac{5}{2}}+\frac{8}{3}(x-4)^{\frac{3}{2}}$$

問. 次の不定積分を（　）内の置き換えを用いて求めよ.

(1) $\displaystyle\int \tan^2 x\,dx \qquad (t = \tan x)$

(2) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x}}{x}\,dx \qquad (t = \sqrt{1+x})$