数学補習 2：講義プリント 12

♣ 不定積分の部分積分法の応用

部分積分法を繰り返し用いることで，不定積分を求めることができる。

例 2.3. 不定積分 $\int e^x \sin x \, dx$ を求めよ。

[**解答**] $I = \int e^x \sin x \, dx$ とおいて部分積分法を 2 回用いると

$$
\begin{aligned}
I &= \int e^x \sin x \, dx = \int (e^x)' \sin x \, dx \\
&= e^x \sin x - \int e^x (\sin x)' \, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx \\
&= e^x \sin x - \int (e^x)' \cos x \, dx = e^x \sin x - \left(e^x \cos x - \int e^x (\cos x)' \, dx \right) \\
&= e^x \sin x - \left(e^x \cos x - \int e^x (-\sin x) \, dx \right) \\
&= e^x \sin x - e^x \cos x - I
\end{aligned}
$$

なので

$$2I = e^x \sin x - e^x \cos x.$$

従って，

$$I = \int e^x \sin x \, dx = \frac{e^x \sin x - e^x \cos x}{2}$$

例 2.4. n を自然数するとき，不定積分 $I_n = \displaystyle\int \cos^n x\,dx$ の漸化式をつくれ。
また, 不定積分 I_3 を求めよ.

[**解答**]

$$
\begin{aligned}
I_n &= \int \cos^n x\,dx = \int \cos^{n-1} x \cos x\,dx \\
&= \int \cos^{n-1} x (\sin x)'\,dx \\
&= \cos^{n-1} x \sin x - \int \{\cos^{n-1} x\}' \sin x\,dx \\
&= \cos^{n-1} x \sin x - \int \{(n-1)\cos^{n-2} x(-\sin x)\} \sin x\,dx \\
&= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)\int \cos^{n-2} x \sin^2 x\,dx \\
&= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)\int \cos^{n-2} x (1-\cos^2 x)\,dx \\
&= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)\left(\int \cos^{n-2} x\,dx - \int \cos^n x\,dx\right) \\
&= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n
\end{aligned}
$$

従って，

$$I_n + (n-1)I_n = \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)I_{n-2}$$

となるので

$$nI_n = \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)I_{n-2}.$$

よって，漸化式

$$I_n = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} I_{n-2} \qquad (n \geqq 2) \tag{1}$$

をえる。

(1) の漸化式で $n = 3$ とすると

$$
\begin{aligned}
I_3 &= \frac{1}{3}\cos^2 x \sin x + \frac{2}{3} I_1 \\
&= \frac{1}{3}\cos^2 x \sin x + \frac{2}{3}\int \cos x\,dx \\
&= \frac{1}{3}\cos^2 x \sin x + \frac{2}{3}\sin x.
\end{aligned}
$$