数学補習 2：講義プリント 13

♣ 定積分の求め方： 連続関数の定積分を求めるには，不定積分がわかればよい。

定理 1.3. 関数 $y = f(x)$ は区間 $[a, b]$ で連続であるとする。このとき，
関数 $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + C$ は $f(x)$ の原始関数である。ここで， C は積分定数である。つまり，$F(x)$ は x について微分可能で

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x).$$

証明. 平均値の定理より

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) &= \int_a^{x+h} f(x)\,dx - \int_a^x f(x)\,dx = \int_x^{x+h} f(x)\,dx \\ &= hf(\alpha) \end{aligned}$$

となる α が区間 $[x, x+h]$ 内に存在する。明らかに，$h \to 0$ のとき $\alpha \to x$ となる。関数 $f(x)$ は連続なので，$h \to 0$ のとき $f(\alpha) \to f(x)$ となるので

$$\frac{d}{dx}F(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$

となり，$F(x)$ は $f(x)$ の原始関数であることがわかる。 □

定理 1.4（微分積分学の基本定理）. 関数 $y = f(x)$ は区間 $[a, b]$ で連続であるとし，
$F(x)$ を $f(x)$ の原始関数とする，つまり，$F'(x) = f(x)$ とすると

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \tag{1}$$

となる。このとき，(1) の右辺を $F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$ とか，$F(b) - F(a) = [F(x)]_{x=a}^{x=b}$ とかく。

証明. 定理 1.3 より，$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + C$ は $f(x)$ の原始関数である。従って，

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^a f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

□

定積分の求め方 連続関数 $f(x)$ の定積分を求めるには，$f(x)$ の原始関数がわかればよい。

例.　次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_1^2 (3x^2-2)\,dx$　　　(2) $\displaystyle\int_0^\pi 6\sin 3x\,dx$

[解答]

(1) $3x^2-2$ の原始関数（不定積分）は x^3-2x なので

$$\int_1^2 (3x^2-2)\,dx = [x^3-2x]_1^2 = (2^3-2\cdot 2)-(1^3-2\cdot 1) = 8-4-1+2 = 5.$$

(2) $6\sin 3x$ の原始関数（不定積分）は $-2\cos 3x$ なので

$$\int_0^\pi 6\sin 3x\,dx = [-2\cos 3x]_0^\pi = -2\cos 3\pi-(-2\cos 0) = 2+2 = 4.$$

問. 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 (x+1)^2\,dx$　　　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x\,dx$　　　(3) $\displaystyle\int_1^2 \frac{2x^3+x-4}{x^2}\,dx$