数学補習2：講義プリント14

♣ 定積分の置換積分と部分積分

定理 1.5（置換積分法）. 関数 $x=\varphi(t)$ と $\varphi'(t)$ は $[a,b]$ で連続，関数 $y=f(x)$ は $x=\varphi(t)$ の値域で連続で，$a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$ ならば

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

定理 1.6（部分積分法）. $f'(x)$ と $g'(x)$ が $[a,b]$ で連続ならば

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

例. 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1 (2x+1)^3\,dx$　　　(2) $\displaystyle\int_1^2 (x-1)(x-2)^3\,dx$

[解答]

(1) $t=2x+1$ とおくと， $dt=2dx$ なので，$dx=\dfrac{1}{2}dt.$　また， x と t の対応は次のようになる。

x	$0\longrightarrow 1$
t	$1\longrightarrow 3$

よって，

$$\int_0^1 (2x+1)^3\,dx = \int_1^3 t^3\cdot\frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int_1^3 t^3\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{t^4}{4}\right]_1^3 = \frac{1}{2}\left(\frac{3^4}{4}-\frac{1}{4}\right) = 10.$$

(2)

$$\begin{aligned}
\int_1^2 (x-1)(x-2)^3\,dx &= \int_1^2 (x-1)\left\{\frac{(x-2)^4}{4}\right\}'\,dx \\
&= \left[(x-1)\cdot\frac{(x-2)^4}{4}\right]_1^2 - \int_1^2 (x-1)'\frac{(x-2)^4}{4}\,dx \\
&= 0-\int_1^2 \frac{(x-2)^4}{4}\,dx \\
&= -\left[\frac{(x-2)^5}{20}\right]_1^2 = -\left(0-\frac{-1}{20}\right) = -\frac{1}{20}
\end{aligned}$$

問. 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x + 1)\cos x\, dx$ (2) $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{x}{\sqrt{3-x}}\, dx$ (3) $\displaystyle\int_1^{e} \log x\, dx$ (4) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin x\, dx$