

♣ 広義積分

区間 $[a, b]$ の端点で定義されていない関数の定積分や, $[0, \infty)$ のような無限区間上での積分を
考えたい! 例えば, $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ や $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx$ はどのように求めればよいのか?

広義積分 $y = f(x)$ は不定積分をもつとする。 $y = f(x)$ が $x = a$ で定義されていないとき

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{s \rightarrow a+0} \int_s^b f(x) dx$$

と定義し, これを $f(x)$ の**広義積分**という。広義積分が存在するとき, $f(x)$ は**広義積分可能である**, または, **広義積分は収束する**という。

同様に,

• $y = f(x)$ が $x = b$ で定義されていないとき,
$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{s \rightarrow b-0} \int_a^s f(x) dx$$

• $y = f(x)$ が区間 $[a, \infty)$ で定義されているとき,
$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{s \rightarrow \infty} \int_a^s f(x) dx$$

• $y = f(x)$ が区間 $(-\infty, b]$ で定義されているとき,
$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{s \rightarrow -\infty} \int_s^b f(x) dx$$

と定義する。

例 2.1. $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx$ を求めよ。

[解答]

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^s \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{s \rightarrow \infty} [\tan^{-1} x]_0^s = \lim_{s \rightarrow \infty} (\tan^{-1} s - \tan^{-1} 0) = \frac{\pi}{2}$$

例 2.2. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ を求めよ。

[解答]

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{s \rightarrow 0+0} \int_s^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{s \rightarrow 0+0} [2\sqrt{x}]_s^1 = \lim_{s \rightarrow 0+0} (2 - 2\sqrt{s}) = 2$$

例 $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ を求めよ。

[解答]

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{s \rightarrow 0+0} \int_s^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{s \rightarrow 0+0} [\log |x|]_s^1 = \lim_{s \rightarrow 0+0} (\log 1 - \log s) = \infty$$

問. 次の広義積分の値を求めよ.

$$(1) \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx \quad (2) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (3) \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}} dx \quad (4) \int_1^{\infty} \frac{1}{x(x+1)} dx$$