数学補習２：定積分の定義

♣ 定積分

連続関数 $y = f(x)$ の閉区間 $[a, b]$ 上での定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ を定義する。

以下，話を簡単にするため，$f(x) \geqq 0,\ a = 0,\ b = 1$ として, 定積分 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ の定義を与える。

定積分の定義　区間 $[0, 1]$ を n 個に等分割し，それを

$$\Delta : 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$$

とする。このとき，分割の幅を $|\Delta|$ とかくことにすると，$|\Delta| = \dfrac{1}{n}$ である。

次に，各小区間 $[x_{k-1}, x_k]$ の中から 1 点 p_k をとる．このような n 個の点列を $\{p_k\}$ とかくとき,

$$S(f; \Delta, \{p_k\}) := \sum_{k=1}^{n} f(p_k)(x_k - x_{k-1}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(p_k)$$

を f の Δ と $\{p_k\}$ についてのリーマン和という。

このとき，$n \to \infty$ とすると，閉区間 $[0, 1]$ の分割の幅 $|\Delta| = \dfrac{1}{n}$ は限りなく 0 に近づくので,

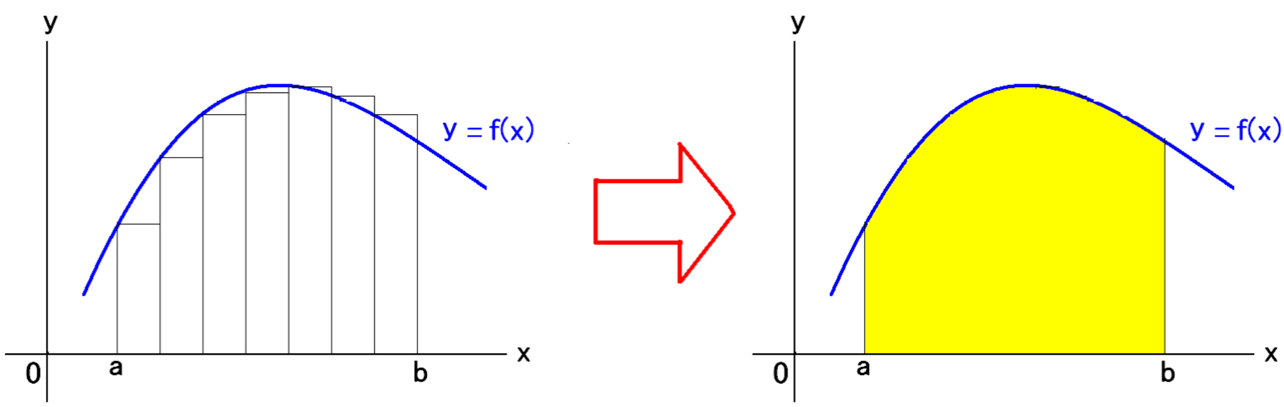
$$\lim_{|\Delta| \to 0} S(f; \Delta, \{p_k\}) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(p_k)$$

が存在するとき，$f(x)$ **は閉区間** $[0, 1]$ **上で積分可能である**といい,

$$\int_0^1 f(x)\ dx := \lim_{|\Delta| \to 0} S(f; \Delta, \{p_k\}) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(p_k)$$

と表す.

Remark.　上記の考え方を利用すれば，一般閉区間 $[a, b]$ 上 の定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ を定義することができる。



Remark　便宜上,

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0, \qquad \int_a^b f(x) = -\int_b^a f(x)\,dx$$

と定義する。また,

$f(x)$ が区間 $[a,b]$ で連続ならば，$f(x)$ は $[a,b]$ で積分可能である

ことが示されている。

♣ 定積分の性質

定理 1.1.　区間 $[a,b]$ で $f(x)$, $g(x)$ が積分可能なとき,

(1)　$\alpha f(x) + \beta g(x)$ も積分可能で,（α, β は定数）

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx.$$

(2)　$f(x) \geqq g(x)$ ならば

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqq \int_a^b g(x)\,dx.$$

(3)　$f(x)$ が区間 $[a,c]$, $[c,b]$ で積分可能なとき,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

(4)　$|f(x)|$ も積分可能で

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

(5)　区間 $[a,b]$ 上で，$m \leqq f(x) \leqq M$ とする（m, M は定数)。このとき

$$m(b-a) \leqq \int_a^b f(x)\,dx \leqq M(b-a).$$

定理 1.2（積分に関する平均値の定理）.

$f(x)$ が区間 $[a,b]$ で連続なとき，区間 (a,b) 内のある α に対し

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(\alpha).$$