Higson コンパクト化の基礎事項

嶺 幸太郎（筑波大学 数理物質科学研究科）

本稿は Roe [7] 2.3 節およびその周辺話題の概説を目的としたものである．位相空間の一般的なコンパクト化の復習から始め, なるべく関数解析の知識を用いずに述べるよう試みた. 学部生でも読めるよう全体にわたって丁寧な証明を心がけたつもりである.

1 Gel'fand-Naimark 理論とコンパクト化

この節では, コンパクト化の一般論における必要最低限の知識について概説する．より詳しい事情については Engelking [2] を参照されたい.

1.1 導入

自然数全体および整数全体, 実数全体, 複素数全体の集合をそれぞれ $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ と表す．また, 位相空間にはハウスドルフの分離性[1]を常に仮定すると約束しよう．本稿では, 次の自明でない主張 (**ティーチェの拡張定理**) を何度も用いる．証明は, 位相空間論の一般的な参考書を参照されたい.

定理 1.1 (Tietze). 正規空間[2] X の閉集合 A および連続関数 $f : A \to [0, 1]$ に対して, $\widetilde{f}|_A = f$ を満たす連続関数 $\widetilde{f} : X \to [0, 1]$ が存在する.

次は**ウリゾーンの補題**と呼ばれる主張である．ティーチェの拡張定理の系としても得られる.

系 1.2 (Urysohn). 正規空間 X の互いに交わらない閉集合 A, B に対して, $f(A) = \{0\}$, $f(B) = \{1\}$ を満たす連続関数 $f : X \to [0, 1]$ が存在する.

位相空間 X を稠密に含むコンパクト空間 $\widetilde{X}$ を X の**コンパクト化** (**compactification**) という. 本稿では, コンパクト化とはハウスドルフ・コンパクト化のみを指す．したがって, 次の事実により暗黙のうちに我々は X をコンパクトでないチコノフ空間[3]であるとして話を進める.

事実 1.3. 位相空間 X のハウスドルフ・コンパクト化が存在するための必要十分条件は X がチコノフ空間となることである.

Proof. もしハウスドルフ・コンパクト化 $\widetilde{X}$ が存在するとすれば, $\widetilde{X}$ は正規空間であるから, とくにチコノフ空間である．したがって, その部分空間である X もチコノフ空間である．逆に, X がチコノフ空間であるとすれば, X の Stone-Čech コンパクト化 (定義は次項) は X のハウスドルフ・コンパクト化である. □

[1]位相空間 X の任意の異なる 2 点 $x, y \in X$ に対して, これらを分離する開集合 $U, V \subset X$ が存在する (すなわち, $x \in U$, $y \in V$, $U \cap V = \emptyset$) とき, X を**ハウスドルフ空間** (**Hausdorff space**) と呼ぶ.

[2]互いに交わらない任意の閉集合 $A, B \subset X$ において, これらを分離する開集合 $U, V \subset X$ が存在する (すなわち, $A \subset U$, $B \subset V$, $U \cap V = \emptyset$) とき, このようなハウスドルフ空間 X を**正規空間** (**normal space**) という.

[3]ハウスドルフ空間 X が**チコノフ空間** (**Tychonoff space**) であるとは, $f(F) = \{0\}$, $f(x) = 1$ なる連続関数 $f : X \to [0, 1]$ の存在が X の任意の閉集合 F およびその外側の点 $x \in X \setminus F$ に対して言えることである．ウリゾーンの補題により, 正規空間はチコノフ空間である.

X のコンパクト化 $\widetilde{X}$ に対して, $\partial X := \widetilde{X} \setminus X$ をコンパクト化の**剰余** (**remainder**) あるいは**境界** (**boundary**) と呼ぶ. X が局所コンパクト[4]であるとき ∂X はコンパクトであり, X 自身は $\widetilde{X}$ の開集合となっている:

事実 1.4. 局所コンパクト空間 X のコンパクト化 $\widetilde{X}$ において, X は $\widetilde{X}$ の開集合である.

Proof. 任意の $x \in X$ に対して, X における x のコンパクト近傍 K を取る. このとき, X は $\widetilde{X}$ の部分空間であるから, $\widetilde{X}$ における x の開近傍 U で, $U \cap X \subset K$ を満たすものが存在する. X は $\widetilde{X}$ において稠密であったから, $U \cap X$ は開集合 U において稠密となる. ゆえに, $U \subset \mathrm{cl}_{\widetilde{X}}(U \cap X) \subset \mathrm{cl}_{\widetilde{X}} K = K$. したがって $U \subset X$ であり, X は $\widetilde{X}$ の開集合である. □

X のコンパクト化全体で構成されるクラスを $\mathcal{K}(X)$ で表そう. $\mathcal{K}(X)$ 上には, 次のような向き "$\leq$" および同値関係 "$\sim$" が定義できる.

定義 1.5. コンパクト化 $\gamma X, \delta X \in \mathcal{K}(X)$ において $q|_X = \mathrm{id}_X$ なる連続写像 $q : \delta X \to \gamma X$ が存在するとき $\gamma X \leq \delta X$ と書く. $\gamma X \leq \delta X$ かつ $\delta X \leq \gamma X$ が成立するとき $\gamma X \sim \delta X$ であると関係 "$\sim$" を定義すれば, これは同値関係となる. 更に, $\mathcal{K}(X)/\!\sim$ にも "$\leq$" により自然に向きが定義され, $(\mathcal{K}(X)/\!\sim, \leq)$ は順序集合となる. 以下, 順序集合 $(\mathcal{K}(X)/\!\sim, \leq)$ を略して $\mathcal{K}(X)$ と書く.

事実 1.6. コンパクト化に順序関係をもたらす写像は境界を境界に写す. すなわち, $q|_X = \mathrm{id}_X$ なる連続写像 $q : \delta X \to \gamma X$ について, $q(\delta X \setminus X) = \gamma X \setminus X$.

Proof. まず $q(\delta X \setminus X) \subset \gamma X \setminus X$ を示そう. 任意の $z \in \delta X \setminus X$ に対して, z に収束する有向点列 $x_\lambda \in X$ $(\lambda \in \Lambda)$ を取る. もし $q(z) \in X$ とすれば, q の連続性より X 上の有向点列 $q(x_\lambda) = x_\lambda$ は $q(z)$ に収束し, ゆえに δX において x_λ は二つの収束先 $z, q(z)$ をもつ. これは δX のハウスドルフ性に矛盾する. したがって $q(z) \in \gamma X \setminus X$.

δX はコンパクトであるから, $q(\delta X)$ は X を含む γX 上の閉集合である. γX において, $\gamma X = \mathrm{cl}_{\gamma X} X$, すなわち γX は X を含む最小の閉集合であるから $\gamma X \subset q(\delta X)$ となり, とくに q は全射となる. ゆえに $q(\delta X \setminus X) = \gamma X \setminus X$. □

事実 1.7. $\gamma X \sim \delta X$ ならば, γX と δX は同相 ($\approx$) である.

Proof. $q_1|_X = q_2|_X = \mathrm{id}_X$ を満たす連続写像 $q_1 : \delta X \to \gamma X$, $q_2 : \gamma X \to \delta X$ を取れば, $q_2 \circ q_1|_X = \mathrm{id}_X$ である. したがって, $q_2 \circ q_1$ と $\mathrm{id}_{\delta X}$ は稠密部分集合 X で一致する連続写像であるから $q_2 \circ q_1 = \mathrm{id}_{\delta X}$. 同様に $q_1 \circ q_2 = \mathrm{id}_{\gamma X}$ となり, q_1 は $q_1^{-1} = q_2$ を満たす同相写像となる. □

事実 1.8. 順序集合 $\mathcal{K}(X)$ は上半完備束[5]である. 更に, X が局所コンパクト空間ならば $\mathcal{K}(X)$ は完備束である.

事実 1.8 は明らかではなく, あとで述べる関数環を通した対応関係 (定理 1.11) から導かれる. $\mathcal{K}(X)$ の最大元が Stone-Čech コンパクト化である. X が局所コンパクト空間のとき, その最小元は 1 点コンパクト化になる.

[4]各点がコンパクトな近傍をもつ空間を**局所コンパクト空間**という. 局所コンパクト空間は, 1 点コンパクト化 (定義は次項) を持つので正規空間の部分空間となる. ゆえにチコノフ空間である.

[5]順序集合が**上半完備束** (**complete upper semilattice**) であるとは, 任意の部分集合がその順序において上限を持つことと定義する. 任意の部分集合が上限および下限を持つ場合は**完備束** (**complete lattice**) という.

パラコンパクト性についても少しだけ述べておこう．任意の開被覆が，局所有限[6]な開被覆による細分を持つ位相空間を**パラコンパクト空間** (**paracompact space**) という．パラコンパクト空間の閉部分空間はパラコンパクトである．また，距離空間はパラコンパクト空間であり，パラコンパクト空間は正規空間になることが知られている．次の事実は，幾何的な考察が行える大概の局所コンパクト空間はパラコンパクトであることを意味している．

事実 1.9. コンパクト集合の可算和で表せる局所コンパクト空間はパラコンパクト空間である．

Proof. X の局所コンパクト性を用いれば，各 $n \in \mathbb{N}$ について $K_n \subset \operatorname{int}_X K_{n+1}$ を満たすようなコンパクト集合 K_n の和として X は表現できる．$K_{-1} = K_0 = \emptyset$ とする．各 $A_n := K_n \setminus \operatorname{int}_X K_{n-1}$ $(n \in \mathbb{N})$ はコンパクト集合であり，$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ となる．また，$|i-j| \geq 2$ $(i, j \in \mathbb{N})$ ならば A_i と A_j は交わらない．

さて，X の任意の開被覆 $\mathcal{U}$ に対して，$\mathcal{V}_n := \{\, U \cap ((\operatorname{int} K_{n+1}) \setminus K_{n-2}) \mid U \in \mathcal{U},\ n \in \mathbb{N} \,\}$ とすれば，$\mathcal{V}_n$ は A_n の開被覆であり，A_n のコンパクト性より $\mathcal{V}_n$ は有限部分被覆 $\mathcal{V}'_n$ を持つ．このとき $\mathcal{V} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{V}'_n$ は X の開被覆であり，また $\mathcal{U}$ の細分である．$\mathcal{V}_n$ の取り方から，$|n-m| \geq 2$ ならば $\mathcal{V}'_n$ の各元は A_m とは交わらず，これは $\mathcal{V}$ が局所有限であることを意味する． □

本稿では，技術的な理由から次の事実 1.10 に述べる状況を要請するために何度か空間のパラコンパクト性を仮定する．また，これ以外の理由では補題 3.13 においてのみパラコンパクト性を用いる．位相空間 X の部分集合 A が**相対コンパクト** (**relatively compact**) であるとは，その閉包 $\operatorname{cl}_X A$ がコンパクト集合になるときをいう．

事実 1.10. パラコンパクト空間 X の相対コンパクトでない部分集合 A は，X における離散無限部分集合[7]を含む．

Proof. $F := \operatorname{cl}_X A$ はコンパクトでないから，有限部分被覆を持たない F の開被覆 $\mathcal{U}$ が存在する．F のパラコンパクト性から局所有限な $\mathcal{U}$ の細分 $\mathcal{V}$ を取れば，$\mathcal{V}$ も有限部分被覆を持たず，とくに $\mathcal{V}$ は無限個の集合を含む集合族である．各 $V \in \mathcal{V}$ に対して，$x_V \in V \cap A$ を取れば $D := \{x_V \mid V \in \mathcal{V}\,\}$ は無限集合である．何故なら，もし D が有限であるとすれば，無限個の $\mathcal{V}$ の元に含まれるような $z \in D$ が存在し，これは $\mathcal{V}$ の局所有限性に反してしまう．D が X の離散部分集合となることを示すには，F が閉集合であることから，D が F の離散部分集合となることを示せば十分である．任意の点 $x \in F$ に対して，$\mathcal{V}$ の局所有限性から十分小さい x の近傍 U を取れば，$U \cap D$ は有限集合となる．したがって，ハウスドルフの分離性により D との共通部分が 1 点以下になるよう更に小さな x の近傍を取ることができる．これは D が閉集合であり，更に離散集合となることを意味する． □

1.2 コンパクト化と関数環

X を定義域とする実数値有界連続関数全体を $C^*(X)$ で表そう．なお，Roe [7] では実数値ではなく複素数値関数を扱っており，確かに，そのほうが望ましい部分もある．一方，他のいくつかの文献では実数値として扱っていること，またコンパクト化により分かりやすいイメージを与えることを鑑み，まずは実数値関数について話を進めてみたい．複素数値関数で考える場合は，この項で述べる "実バナッハ環" をすべて "C^* 環" に置き換えて読み直せば良い．

[6] X の部分集合族 $\mathcal{U}$ が**局所有限** (**locally finite**) であるとは次を満たすことと定義する：$\forall\, x \in X, \exists\, V_x$: x の近傍 s.t. $\{\, U \in \mathcal{U} \mid U \cap V_x \neq \emptyset \,\}$ は有限集合．

[7] X の閉集合 A の各点が孤立点となるとき (すなわち，$\forall\, a \in A, \exists\, U \subset X : a$ の近傍, s.t. $A \cap U = \{a\}$)，A を X の**離散部分集合** (**discrete subset**) という．自分自身が離散部分集合になる位相空間を**離散空間** (**discrete space**) という．離散空間を定義域とする任意の写像は連続であり，とくに濃度の等しい離散空間は同相である．

さて, 一様ノルム $\|f\| := \sup_{x\in X}|f(x)|$ による位相を入れれば, 自然な和と積の演算に関して $C^*(X)$ は実バナッハ環[8]となる. $C^*(X)$ の単位元 $\mathbf{1}$ は全ての値を $1 \in \mathbb{R}$ にとる定数関数のことである. $C^*(X)$ の単位的[9]部分バナッハ環で X の位相を生成するもの全体を $\mathcal{A}(X)$ と書こう. ここで, $A \subset C^*(X)$ が X の位相を**生成する** (**generate**) とは, A のすべての元を連続にするような X の最弱位相が元の位相に一致することである. X はチコノフ空間であり A が代数構造を持つことから, これは X の任意の閉集合とその外側の点を分離する関数が A の中に存在することと同値である. $C^*(X)$ 自身が $\mathcal{A}(X)$ に属するため $\mathcal{A}(X)$ は空集合ではない.

単位的可換 C^* 環とコンパクト・ハウスドルフ空間の間には一対一の対応があることが知られている (1.5 項参照). これを X のコンパクト化に限って読み直すと次が成立する.

定理 1.11. チコノフ空間 X に対して, $(\mathcal{K}(X), \leq)$ と $(\mathcal{A}(X), \subset)$ は順序同型である.

定理 1.11 を証明するために順序同型 $S : \mathcal{K}(X) \to \mathcal{A}(X)$, およびその逆写像 $T : \mathcal{A}(X) \to \mathcal{K}(X)$ を定義しよう. 各 $\gamma X \in \mathcal{K}(X)$ に対して, γX に連続関数として拡張可能な X 上の関数全体を $S(\gamma X)$ とする. つまり,

$$S(\gamma X) := \{\, f|_X \mid f \in C^*(\gamma X) \,\} \ \subset C^*(X).$$

X は γX の稠密部分集合であることから, $S(\gamma X)$ と $C^*(\gamma X)$ はバナッハ環として同型 ($\simeq$) である. 更に, $C^*(\gamma X)$ が γX の位相を生成することから, $S(\gamma X)$ が X の位相を生成することが分かる (つまり $S(\gamma X) \in \mathcal{A}(X)$). 一方, 各 $A \in \mathcal{A}(X)$ に対して, X から無限直積空間 $\mathbb{R}^A$ への写像 $e_A : X \to \mathbb{R}^A$ を $e_A(x) := (f(x))_{f\in A}$ と定義すれば A が X の位相を生成することから e_A は埋蔵写像である. このとき $e_A(X) \subset \prod_{f\in A}[-\|f\|, \|f\|]$ であり, チコノフの定理[10]により $\prod_{f\in A}[-\|f\|, \|f\|]$ はコンパクトであるゆえ, $e_A(X)$ の閉包

$$T(A) := \mathrm{cl}_{\mathbb{R}^A}\, e_A(X) \subset \prod_{f\in A}[-\|f\|, \|f\|]$$

はコンパクト空間となり, これは X のコンパクト化と見なせる. なお, $T(A)$ は A の極大イデアル空間に一致する (例 1.47). $S \circ T = \mathrm{id}_{\mathcal{A}(X)}$ を示すにあたり, 次の **Stone-Weierstrass の近似定理**は必須である:

定理 1.12 (Stone-Weierstrass). コンパクト・ハウスドルフ空間 K において, $C^*(K)$ の単位的部分多元環 A が K 上の各点を分離する (すなわち, $\forall\, z \neq z' \in K$, $\exists\, f \in A$ s.t. $f(z) \neq f(z')$) ならば A は $C^*(K)$ の稠密部分集合となる. とくに, 多項式環 $\mathbb{R}[x]$ は $C^*([0,1])$ において稠密となる (**Weierstrass の近似定理**).

命題 1.13. $S \circ T = \mathrm{id}_{\mathcal{A}(X)}$. すなわち, X のコンパクト化 $T(A)$ 上に拡張する X 上の実数値有界連続関数全体は A に一致する.

---

[8]バナッハ空間が, 和やスカラー倍との間の分配法則・結合法則を満たす積の構造をもち (したがって多元環 (algebra) である), ノルム条件 $\|f \cdot g\| \leq \|f\|\|g\|$ を満たすとき, **バナッハ環** (**Banach algebra**) という. とくに実数体上のバナッハ環を**実バナッハ環** (**real Banach algebra**) という. (複素) バナッハ環が対合 $*$ を持ち, C^* ノルム条件 $\|f^* \cdot f\| = \|f\|^2$ を満たすとき $\boldsymbol{C^*}$**環** ($\boldsymbol{C^*}$**-algebra**) という. 詳しい定義は各参考書を参照されたい.

[9]単位元 $\mathbf{1}$ を含む多元環を**単位的** (**unital**) という. バナッハ環においては $\|\mathbf{1}\| = 1$ を仮定する.

[10]コンパクト空間による直積空間はコンパクト空間である.

Proof. $\widetilde{X} := T(A)$ と置き, $S(\widetilde{X}) = A$ を示そう. $f \in A$ に対して射影 $\mathrm{pr}_f : \mathbb{R}^A \to \mathbb{R}$ の制限 $\widetilde{f} := \mathrm{pr}_f|_{\widetilde{X}}$ は f の拡張と見なすことができる. 実際, 任意の $x \in X$ について

$$\widetilde{f}(e_A(x)) = \mathrm{pr}_f(e_A(x)) = f(x)$$

であり, いま我々は $x \in X$ と $e_A(x) \in \mathbb{R}^A$ を同一視していたのであった. ゆえに $A \subset S(\widetilde{X})$. $\widetilde{A} := \{\widetilde{f} \mid f \in A\}$ と置き, $\widetilde{A} = C^*(\widetilde{X})$ が示せれば, それぞれの X への制限を考えることで $A = S(\widetilde{X})$ を得る. $\widetilde{A}$ が $C^*(\widetilde{X})$ の稠密部分集合であることはStone-Weierstrassの近似定理から直ちに得られる. 実際, 任意の $z, z' \in \widetilde{X} \subset \mathbb{R}^A$ に対して, $z \neq z'$ ならば, $\mathrm{pr}_f(z) \neq \mathrm{pr}_f(z')$ を満たす $f \in A$ が存在し, このとき $\widetilde{f}(z) \neq \widetilde{f}(z')$ である. したがって, 近似定理により $\widetilde{A}$ は $C^*(\widetilde{X})$ の稠密部分集合となる. $\widetilde{A}$ と A は等長ゆえ, $\widetilde{A}$ は完備距離空間であるから, とくに $C^*(\widetilde{X})$ の閉集合である. 以上より $\widetilde{A} = C^*(\widetilde{X})$. □

定理 *1.11* の証明. $S \circ T = \mathrm{id}_{\mathcal{A}(X)}$ は既に示した. まず $T \circ S = \mathrm{id}_{\mathcal{K}(X)}$ を示そう. 任意に $\gamma X \in \mathcal{K}(X)$ を取り, $\widetilde{X} := T(S(\gamma X))$ と置く. $S(\gamma X)$ の任意の元 f は γX への連続な拡張 $\widetilde{f}$ を持つことから, 埋め込み $e_{S(\gamma X)} : X \to \widetilde{X} \subset \mathbb{R}^{S(\gamma X)}$ は連続写像 $\widetilde{e} : \gamma X \to \mathbb{R}^{S(\gamma X)}$ に拡張する (任意の $z \in \gamma X$ について $\widetilde{e}(z) := (\widetilde{f}(z))_{f \in S(\gamma X)}$ とすればよい). $\widetilde{X}$ は $\widetilde{e}(X)$ を含むコンパクト集合であるから $\widetilde{e}^{-1}(\widetilde{X})$ は X を含む γX の閉集合であり, ゆえに γX に等しい. したがって $\widetilde{e}(\gamma X) \subset \widetilde{X}$ であり, 更に $\widetilde{e}(\gamma X)$ は $e(X)$ を含むコンパクト集合なので $\widetilde{e}(\gamma X) = \widetilde{X}$ となる. 制限 $\widetilde{e}|_{\gamma X} : \gamma X \to \widetilde{X}$ が単射であることを示せば, これは同相写像であることが分かり, $\gamma X \sim \widetilde{X}$ を得る. 任意の $z \neq z' \in \gamma X$ に対して, $\widetilde{f}(z) \neq \widetilde{f}(z')$ を満たす $\widetilde{f} \in C^*(\gamma X)$ を取る. $f := \widetilde{f}|_X \in S(\gamma X)$ とすれば, $\mathrm{pr}_f \circ \widetilde{e}$ と $\widetilde{f}$ は定義域 γX の稠密部分集合 X 上で一致する連続関数であるから $\mathrm{pr}_f \circ \widetilde{e} = \widetilde{f}$. ゆえに $\widetilde{e}(z) \neq \widetilde{e}(z')$ であり, $\widetilde{e}|_{\gamma X}$ は単射となる. 以上より $T \circ S(\gamma X) = \gamma X$.

次に S が順序を保つことを示す. $\gamma X \leq \delta X$ とすれば定義により $q|_X = \mathrm{id}_X$ なる連続写像 $q : \delta X \to \gamma X$ が存在する. 任意の $f \in S(\gamma X)$ に対して, f の γX への拡張を $\widetilde{f}$ とすれば, $\widetilde{f} \circ q$ は f の δX への拡張である. したがって $f \in S(\delta X)$.

最後に T が順序を保つことを示そう. $A, B \in \mathcal{A}(X)$ および $A \subset B$ とする. 自然な射影 $\mathrm{pr} : \mathbb{R}^B \to \mathbb{R}^A$ において $\mathrm{pr}(T(B)) \subset T(A)$ となることを示せば, 制限 $\mathrm{pr}|_{T(B)} : T(B) \to T(A)$ が $T(A) \leq T(B)$ を導く写像となる. $\mathrm{pr}(T(B)) \subset T(A)$ は, 上で示した $\widetilde{e}(\gamma X) \subset \widetilde{X}$ と同様の議論で示される. □

コンパクト化を考えるということは, 境界に連続的に拡張できる関数を決めることに他ならない. 次はコンパクト化の特徴づけの一つとして, しばしば用いられる.

系 1.14. X の二つのコンパクト化 $\gamma X, \delta X$ が同値であるための必要十分条件は, $S(\gamma X) = S(\delta X)$ となること, すなわち, それぞれのコンパクト化に拡張する X 上の実数値有界連続関数全体が一致する事である. □

$C^*(X)$ の部分バナッハ環および順序同型 T から色々なコンパクト化が得られることが分かった. ここでは特に分かりやすいものについて列挙しておこう.

定義 1.15.

- **Stone-Čech コンパクト化** $\beta X := T(C^*(X))$. X の閉集合からなるフィルターを用いた定義もあり, それとの同値性は例えば系 1.14 を用いるなどして示される. すなわち, $\widetilde{X} \in \mathcal{K}(X)$

が βX と同値であるための必要十分条件は, 任意の $f \in C^*(X)$ が $\widetilde{X}$ 上に連続な拡張を持つことである.

- **Smirnov コンパクト化** $u_{\mathcal{U}}X := T(C_u(X,\mathcal{U}))$. ただし $C_u(X,\mathcal{U})$ は一様空間 $(X,\mathcal{U})$ を定義域とする有界な一様連続関数全体とする.

- **Higson コンパクト化** $h_{\mathcal{E}}X := T(C_h(X,\mathcal{E}))$. ただし $C_h(X,\mathcal{E})$ は粗空間 $(X,\mathcal{E})$ 上の Higson 関数 (2.2 項で定義する) 全体とする.

Stone-Čech コンパクト化は非常に複雑な空間であり, とくに第 1 可算公理すら満たさず, したがって距離付け可能[11]になることはない.

事実 1.16. $\beta\mathbb{N}$ の境界上の各点は可算近傍基を持たない.

Proof. $\omega \in \beta X \backslash X$ が可算近傍基 $\mathfrak{N} := \{N_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ を持つと仮定して矛盾を導こう. $N'_n := \bigcap_{i=1}^n N_i$ と置きなおすことで, $\{\, N'_n \mid n \in \mathbb{N}\,\}$ は $N'_1 \supset N'_2 \supset N'_3 \supset \cdots$ を満たす ω の近傍基となる. そこで, 任意の $n \in \mathbb{N}$ について $x_n \in \mathbb{N} \cap N'_n$ をとれば, x_n は ω に収束する. 部分列を取ることで, 各 x_n はすべて異なると仮定してよい. $a_n := x_{2n}$, $b_n := x_{2n+1}$ とおけば, これらも ω に収束する. $A := \{\, a_n \mid n \in \mathbb{N}\,\}$ および $B := \{\, b_n \mid n \in \mathbb{N}\,\}$ は互いに交わらない閉集合であるから $f(A) = \{0\}$, $f(B) = \{1\}$ を満たす連続関数 $f : \mathbb{N} \to [0,1]$ が存在する. 命題 1.13 により f は $\widetilde{f} : \beta\mathbb{N} \to [0,1]$ に連続に拡張し,

$$\omega \in \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{N}}\, A \cap \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{N}}\, B \subset \widetilde{f}^{-1}(0) \cap \widetilde{f}^{-1}(1) = \emptyset.$$

こうして我々は矛盾を得た. □

一方, よく知られたコンパクト化に対して, 対応するバナッハ環を求めておくことも重要である.

例 1.17. 局所コンパクト空間 X の **1 点コンパクト化** $\alpha X := X \cup \{\infty\}$ とは, 次で定義される位相によるコンパクト化のことである:

$$\{\, U \subset X \mid U : X \text{ の開集合}\,\} \cup \{\, \alpha X \setminus K \mid K : X \text{ のコンパクト部分集合}\,\}$$

このとき, $S(\alpha X) = C_0(X)^+$ である. ただし $C_0(X)^+ := \{\, f \in C^*(X) \mid \exists \lim_{x\to\infty} f(x)\,\}$. ここで, 極限 "$r = \lim_{x\to\infty} f(x)$" は次の省略表現とする:

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, K \subset X : \text{コンパクト}, \quad \text{s.t.} \quad x \in X \setminus K \ \Rightarrow\ |f(x) - r| < \varepsilon.$$

$T(C_0(X)^+)$ における無限遠点は $\infty = \left(\lim_{n\to\infty} f(x)\right)_{f\in C_0(X)^+} \in \mathbb{R}^{C_0(X)^+}$ で表される.

例 1.18. Gromov 双曲空間の Gromov コンパクト化に対応するバナッハ環は, Roe [6] により与えられている.

$C_0(X)^+$ は, 単位元を持たないバナッハ環 $C_0(X) := \{\, f \in C^*(X) \mid \lim_{x\to\infty} f(x) = 0\,\}$ に形式的に単位元を付加したバナッハ環に等しい (つまり $C_0(X)^+ \simeq C_0(X) \oplus \mathbb{R}$). 有界連続関数が $C_0(X)^+$ の元かどうかを判定するにあたり, 次の命題 1.20 がある.

[11] ある距離空間と同相になる位相空間を**距離付け可能** (**metrizable**) であるという.

補題 1.19. 局所コンパクト空間 X について, 点列 $x_n \in X$ $(n \in \mathbb{N})$ が $\infty \in \alpha X$ に収束することと $\{ x_n \mid n \in \mathbb{N} \}$ が X の離散部分集合になることは同値である. $\square$

命題 1.20. 局所コンパクトなパラコンパクト空間 X および $f \in C^*(X)$ について, 次は $f \in C_0(X)^+$ であるための必要十分条件である:

$$\forall\, x_n, y_n \in X, \quad x_n, y_n \ \longrightarrow\ \infty\ (n \to \infty) \ \implies\ |f(x_n) - f(y_n)| \ \longrightarrow\ 0\ (n \to \infty).$$

Proof. $f \in C_0(X)^+$ が条件を満たすことは明らかである. f が条件を満たせば $f \in C_0(X)^+$ となることの対偶を示そう. $f \notin C_0(X)^+$ とすれば, 定義により次が成立する:

$$\forall\, r \in \mathrm{cl}_{\mathbb{R}}\, f(X),\ \exists\, \delta(r) > 0,\ \forall\, K \subset X:\text{コンパクト},\ \exists\, x_{K,r} \in X \setminus K \text{ s.t. } |f(x_{K,r}) - r| > \delta(r).$$

さて, $\mathrm{cl}_{\mathbb{R}}\, f(X)$ のコンパクト性より $\mathrm{cl}_{\mathbb{R}}\, f(X) \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(r_i, \delta(r_i)/2)$ を満たす有限個の $r_i \in \mathrm{cl}_{\mathbb{R}}\, f(X)$ $(i = 1, \cdots, n)$ が存在する. このとき $X = \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(B(r_i, \delta(r_i)/2))$ であり, X はコンパクトでないので $f^{-1}(B(r_{i_0}, \delta(r_{i_0})/2))$ が相対コンパクトにならないような r_{i_0} が見つかる. そこで事実 1.10 より, $f^{-1}(B(r_{i_0}, \delta(r_{i_0})/2))$ に含まれる X の離散部分集合 $\{ y_n \mid n \in \mathbb{N} \}$ を取ろう. 更に, 集合 $A := \{ x_{K,r_{i_0}} \mid K \subset X:\text{コンパクト} \}$ も相対コンパクトでないので A に含まれる X の離散部分集合 $\{ x_n \mid n \in \mathbb{N} \}$ を取る. このとき補題 1.19 より $x_n, y_n \longrightarrow \infty$ であり, $\varepsilon = \delta(r_{i_0})/2$ において x_n, y_n の取り方から $|f(x_n) - r_{i_0}| > 2\varepsilon$, $|f(y_n) - r_{i_0}| < \varepsilon$ である. ゆえに $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$ となり条件の否定が示された. $\square$

次の命題は, 局所コンパクト空間 X において

$$\mathcal{A}(X) = \{ A \subset C^*(X) \mid A \text{ は } C_0(X)^+ \text{ を含むバナッハ環} \}$$

と書けることを意味している.

命題 1.21. 局所コンパクト空間 X および $C^*(X)$ の単位的部分バナッハ環 A に対して, A が X の位相を生成することと $C_0(X)^+ \subset A$ は同値である.

Proof. $C_0(X)^+ \subset A$ とすれば, $C_0(X)^+$ 自身が X の位相を生成するので, A も X の位相を生成することは明らかである. 逆に, A が X の位相を生成するとする. $T(A)$ は X のコンパクト化であり, 1 点コンパクト化 αX は最小のコンパクト化であるから $\alpha X \leq T(A)$. この両辺に S をかませることで $C_0(X)^+ = S(\alpha X) \subset S(T(A)) = A$ を得る. $\square$

以上の内容は, 実バナッハ環を C^* 環に, つまり実数値関数を複素数値関数に置き換えても全く同じ議論が成立する. すなわち, X を定義域とする複素数値有界連続関数全体を $\mathcal{C}^*(X)$ と置き, X の位相を生成する $\mathcal{C}^*(X)$ の単位的部分 C^* 環全体を $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}(X)$ とすれば, 次が成立する.[12]

定理 1.22. チコノフ空間 X に対して, $(\mathcal{K}(X), \leq)$ と $(\mathcal{A}_{\mathbb{C}}(X), \subset)$ は順序同型である. $\square$

[12]複素数値版の Stone-Weierstrass の近似定理は次のような主張である: コンパクト・ハウスドルフ空間 K において, $\mathcal{C}^*(K)$ の単位的部分 C^* 環 A が K 上の各点を分離する (すなわち, $\forall\, z \neq z' \in K, \exists\, f \in A$ s.t. $f(z) \neq f(z')$) ならば $A = C^*(K)$ である.

ここで, 諸々のコンパクト化の定義が実バナッハ環と C^* 環の場合で一致するのか, Smirnov コンパクト化を例に確認してみよう. X の一様構造を固定し, 実数値有界一様連続関数環 $C_u(X) \in \mathcal{A}(X)$ に対応するコンパクト化を $u_{\mathbb{R}}X$, 複素数値有界一様連続関数環 $\mathcal{C}_u(X) \in \mathcal{A}_{\mathbb{C}}(X)$ に対応するコンパクト化を $u_{\mathbb{C}}X$ と書こう. 定理 1.22 の順序同型を $S_{\mathbb{C}} : \mathcal{K}(X) \to \mathcal{A}_{\mathbb{C}}(X)$ とする.

事実 1.23. $u_{\mathbb{R}}X \sim u_{\mathbb{C}}X$.

Proof. $u_{\mathbb{C}}X \leq u_{\mathbb{R}}X$ を示すために任意に $f \in \mathcal{C}_u(X)$ を取る. $\mathbb{C}$ の実軸および虚軸を $\mathbb{R}$ と同一視し, $\mathbb{C}$ からこれらへの射影を $\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2$ とおこう. このとき $f_i := \mathrm{pr}_i \circ f \in C_u(X)$ $(i = 1, 2)$ となることは明らかで, f_i は $u_{\mathbb{R}}X$ へ連続な拡張 $\widetilde{f}_i$ をもつ. 写像 $\widetilde{f} := \widetilde{f}_1 \times \widetilde{f}_2 : u_{\mathbb{R}}X \to \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ は f の拡張であり, ゆえに $f \in S_{\mathbb{C}}(u_{\mathbb{R}}X)$. つまり $\mathcal{C}_u(X) = S_{\mathbb{C}}(u_{\mathbb{C}}X) \subset S_{\mathbb{C}}(u_{\mathbb{R}}X)$ であり, 定理 1.22 から $u_{\mathbb{C}}X \leq u_{\mathbb{R}}X$ を得る.

逆向きの不等式 $u_{\mathbb{R}}X \leq u_{\mathbb{C}}X$ を示そう. 任意の $g \in C_u(X)$ に対して, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ より g は $\mathcal{C}_u(X)$ の元と見なせるので, g の $u_{\mathbb{C}}X$ への連続な拡張 $\widetilde{g} : u_{\mathbb{C}}X \to \mathbb{C}$ が存在する. このとき, X が $u_{\mathbb{C}}X$ の稠密部分集合であることから $\widetilde{g}(u_{\mathbb{C}}X) \subset \mathbb{R}$ を得る. ゆえに $g \in S(u_{\mathbb{C}}X)$ である. 以上より $C_u(X) = S(u_{\mathbb{R}}X) \subset S(u_{\mathbb{C}}X)$ であり, 定理 1.11 より $u_{\mathbb{R}}X \leq u_{\mathbb{C}}X$. □

備考 1.24. Stone-Čech コンパクト化や Higson コンパクト化においても上の事実と同様の証明により, 実数値版と複素数値版の定義は一致する.

1.3 閉集合の分離条件による特徴づけ

2 つのコンパクト化の間に順序が定まるかどうかを判定する手段として, 次の命題がある.

命題 1.25. X を位相空間 $\widetilde{X}$ の稠密部分集合とし, K をコンパクト空間とする. 連続写像 $f : X \to K$ が $\widetilde{X}$ 上に連続に拡張するための必要十分条件は, 互いに交わらない任意の閉集合 $A, B \subset K$ に対して, $\mathrm{cl}_{\widetilde{X}} f^{-1}(A) \cap \mathrm{cl}_{\widetilde{X}} f^{-1}(B) = \emptyset$ となることである.

Proof. 必要性は明らかゆえ十分性のみ示そう. 互いに交わらない任意の閉集合 $A, B \subset K$ について, $\mathrm{cl}_{\widetilde{X}} f^{-1}(A) \cap \mathrm{cl}_{\widetilde{X}} f^{-1}(B) = \emptyset$ であると仮定する. 任意の $z \in \widetilde{X}$ に対して, $\mathfrak{N}(z)$ を z の $\widetilde{X}$ における開近傍全体とする. $\mathcal{F}(z) := \{ \mathrm{cl}_K f(X \cap N) \mid N \in \mathfrak{N}(z) \}$ とおけば, $\mathcal{F}(z)$ は K の閉集合族であり, 任意有限個の $N_1, \cdots, N_n \in \mathfrak{N}(z)$ を取れば

$$\emptyset \neq f(X \cap N_1 \cap \cdots \cap N_n) \subset \mathrm{cl}_K f(X \cap N_1) \cap \cdots \cap \mathrm{cl}_K f(X \cap N_n)$$

ゆえ $\mathcal{F}(z)$ は有限交叉性を持つ. K はコンパクトなので $\bigcap \mathcal{F}(z) \neq \emptyset$ である. $\bigcap \mathcal{F}(z)$ が 1 点集合になることを示そう. もし 2 点以上の点 $y, y' \in \bigcap \mathcal{F}(z)$ を含むとすれば, $y \in V$ および $y' \in V'$, $\mathrm{cl}_K V \cap \mathrm{cl}_K V' = \emptyset$ を満たす開集合 $V, V' \subset K$ が取れる. このとき仮定より,

$$\mathrm{cl}_{\widetilde{X}} f^{-1}(\mathrm{cl}_K V) \cap \mathrm{cl}_{\widetilde{X}} f^{-1}(\mathrm{cl}_K V') = \emptyset.$$

とくに, $\mathrm{cl}_{\widetilde{X}} f^{-1}(V) \cap \mathrm{cl}_{\widetilde{X}} f^{-1}(V') = \emptyset$ である. したがって $z \notin \mathrm{cl}_{\widetilde{X}} f^{-1}(V)$ または $z \notin \mathrm{cl}_{\widetilde{X}} f^{-1}(V')$ の少なくともいずれか一方が成立する. $z \notin \mathrm{cl}_{\widetilde{X}} f^{-1}(V)$ として話を進めよう. このとき $\widetilde{X} \setminus \mathrm{cl}_{\widetilde{X}} f^{-1}(V) \in \mathfrak{N}(z)$ であるから, $\mathrm{cl}_K f(X \setminus \mathrm{cl}_{\widetilde{X}} f^{-1}(V)) \in \mathcal{F}(z)$ である. ゆえに $y \in \mathrm{cl}_K f(X \setminus$

$\mathrm{cl}_{\widetilde{X}} f^{-1}(V))$. 一方, $V \cap f(X \setminus \mathrm{cl}_{\widetilde{X}} f^{-1}(V)) = \emptyset$ であるから, $f(X \setminus \mathrm{cl}_{\widetilde{X}} f^{-1}(V)) \subset X \setminus V$, とくに $f(X \setminus \mathrm{cl}_{\widetilde{X}} f^{-1}(V))$ の閉包は閉集合 $X \setminus V$ に含まれるので $V \cap \mathrm{cl}_K f(X \setminus \mathrm{cl}_{\widetilde{X}} f^{-1}(V)) = \emptyset$ である. これは $y \in V \cap \mathrm{cl}_K f(X \setminus \mathrm{cl}_{\widetilde{X}} f^{-1}(V))$ に矛盾する. $z \notin \mathrm{cl}_{\widetilde{X}} f^{-1}(V')$ とした場合も同様の矛盾が生じ, 以上より, $\bigcap \mathcal{F}(z)$ は 1 点のみからなる.

さて, 各 $z \in \widetilde{X}$ に対して 1 点集合 $\bigcap \mathcal{F}(z)$ の元を対応させる写像を $F : \widetilde{X} \to K$ とすれば, 任意の $x \in X$ について $f(x) \in \bigcap \mathcal{F}(x)$ であるから, F は f の拡張である. 最後に, F の連続性を示すために $z \in \widetilde{X}$ および $F(z)$ の開近傍 W を任意に取ろう. $\{F(z)\} = \bigcap \mathcal{F}(z)$ であったので, $\{W\} \cup \{X \setminus F \mid F \in \mathcal{F}(z)\}$ は K の開被覆である. K のコンパクト性から, ある有限個の $F_1, \cdots, F_n \in \mathcal{F}(z)$ について $K = W \cup \bigcup_{i=1}^n X \setminus F_i$ となり, 両辺の補集合を取れば $\emptyset = (X \setminus W) \cap \bigcap_{i=1}^n F_i$. したがって, $\bigcap_{i=1}^n F_i \subset W$ となる. 各 F_i は, $F_i = \mathrm{cl}_K f(X \cap N_i)$ $(N_i \in \mathfrak{N}(z))$ と表せるのであった. このとき, $U := \bigcap_{i=1}^n N_i$ は z の開近傍であり, 任意の $z' \in U$ について, 各 N_i は z' の開近傍であるから, $F(z') \in \bigcap \mathcal{F}(z') \subset \bigcap_{i=1}^n \mathrm{cl}_K f(X \cap N_i) \subset W$ となる. ゆえに F は連続である. □

命題 1.26. $\gamma X, \delta X \in \mathcal{K}(X)$ について次は同値である:
(i) $\gamma X \leq \delta X$,
(ii) X の任意の閉集合 A, B について, $\mathrm{cl}_{\gamma X} A \cap \mathrm{cl}_{\gamma X} B = \emptyset \Rightarrow \mathrm{cl}_{\delta X} A \cap \mathrm{cl}_{\delta X} B = \emptyset$.

Proof. 恒等写像 $\mathrm{id}_X : X \to \gamma X$ に対して命題 1.25 を適用すればよい. □

系 1.27. $\gamma X, \delta X \in \mathcal{K}(X)$ について次は同値である:
(i) $\gamma X \sim \delta X$,
(ii) X の任意の閉集合 A, B について, $\mathrm{cl}_{\gamma X} A \cap \mathrm{cl}_{\gamma X} B = \emptyset \iff \mathrm{cl}_{\delta X} A \cap \mathrm{cl}_{\delta X} B = \emptyset$. □

系 1.27 により, X のコンパクト化は, X の 2 つの閉集合の閉包が分離されるための条件によって特徴づけられることが分かった. 次の命題は, 閉包の分離性が, コンパクト化に対応するバナッハ環の元で分離できることと必要十分であることを言っている.

命題 1.28. $A, B \subset X$ および $C \in \mathcal{A}(X)$ について次は同値である:
(i) $\mathrm{cl}_{T(C)} A \cap \mathrm{cl}_{T(C)} B = \emptyset$, (ii) $\exists\, f \in C$ s.t. $f(A) = \{0\}$ かつ $f(B) = \{1\}$.

Proof. (i)⇒(ii): $\mathrm{cl}_{T(C)} A \cap \mathrm{cl}_{T(C)} B = \emptyset$ とすれば, ウリゾーンの補題により $\widetilde{f}(\mathrm{cl}_{T(C)} A) = \{0\}$, $\widetilde{f}(\mathrm{cl}_{T(C)} B) = \{1\}$ を満たす連続関数 $\widetilde{f} : T(C) \to [0,1]$ が存在する. このとき, 命題 1.13 により $f := \widetilde{f}|_X \in S(T(C)) = C$.

(ii)⇒(i): 命題 1.13 により $f \in C$ は $T(C)$ 上に連続な拡張 $\widetilde{f}$ を持つ. このとき, $\mathrm{cl}_{T(C)} A \subset \widetilde{f}^{-1}(0)$, $\mathrm{cl}_{T(C)} B \subset \widetilde{f}^{-1}(1)$ より $\mathrm{cl}_{T(C)} A \cap \mathrm{cl}_{T(C)} B \subset \widetilde{f}^{-1}(0) \cap \widetilde{f}^{-1}(1) = \emptyset$. □

とくに, コンパクトでない全ての閉集合の閉包たちを分離しないコンパクト化が 1 点コンパクト化であり (命題 1.29), 互いに交わらないいかなる閉集合の閉包たちをも分離するコンパクト化が Stone-Čech コンパクト化である (命題 1.30).

命題 1.29. 局所コンパクト空間 X 上のコンパクトでない閉集合 A, B において, $\mathrm{cl}_{\alpha X} A \cap \mathrm{cl}_{\alpha X} B \neq \emptyset$.

Proof. A, B を X のコンパクトでない閉集合とする. $\infty \in \alpha X$ が αX における A の触点になることを示そう. ∞ の任意の開近傍はコンパクト集合 $K \subset X$ を用いて $\alpha X \setminus K$ と表すことができる. A はコンパクトでないので, $\emptyset \neq A \setminus K \subset A \cap (\alpha X \setminus K)$ であり, ゆえに $\infty \in \mathrm{cl}_{\alpha X} A$. 同様の理由で $\infty \in \mathrm{cl}_{\alpha X} B$ となり, $\infty \in \mathrm{cl}_{\alpha X} A \cap \mathrm{cl}_{\alpha X} B \neq \emptyset$ を得る. □

命題 1.30. 正規空間 X における互いに交わらない閉集合 A, B について, $\mathrm{cl}_{\beta X} A \cap \mathrm{cl}_{\beta X} B = \emptyset$.

Proof. A, B を $A \cap B = \emptyset$ なる X の閉集合とすればウリゾーンの補題により A と B を分離する有界連続関数が存在する. 命題 1.28 において $C := C^*(X)$ とすることで主張を得る. $\square$

X の距離 d から導かれる一様構造 $\mathcal{U}_d$ に対する Smirnov コンパクト化 $u_{\mathcal{U}_d}X$ について, Woods [8] は次のように述べている. 証明は, 次項で述べる有界閉区間の一様 AE 性と命題 1.28 から直ちに得られる. ここで, 距離空間 (X, d) の部分集合 A および B について $d(A, B) := \inf\{\, d(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$ とする.

命題 1.31. 距離空間 (X, d) の互いに交わらない閉集合 A, B において次は同値である:
(i) $\mathrm{cl}_{u_{\mathcal{U}_d}X} A \cap \mathrm{cl}_{u_{\mathcal{U}_d}X} B = \emptyset$, (ii) $d(A, B) > 0$. $\square$

2.6 項では, 固有距離空間の有界粗構造 (bounded coarse structure) $\mathcal{E}_d$ に対する Higson コンパクト化について次を得る. 一般の粗構造についても成立するかどうか, 筆者にはすぐには分からなかった.

予告 1.32. 固有距離空間 (X, d) の互いに交わらない閉集合 A, B において次は同値である:
(i) $\mathrm{cl}_{hX} A \cap \mathrm{cl}_{hX} B = \emptyset$, (ii) 任意の $E \in \mathcal{E}_d$ について $E[A] \cap E[B]$ は有界.

1.4 閉部分空間のコンパクト化

X のコンパクト化 $\overline{X}$ が与えられているとしよう. X の閉部分空間 A において, $\mathrm{cl}_{\overline{X}} A$ は A のコンパクト化である. X に何らかの構造が与えられており, $\overline{X}$ がその構造から得られるコンパクト化である場合, A への構造の制限から得られる A のコンパクト化 $\overline{A}$ と $\mathrm{cl}_{\overline{X}} A$ の間に何らかの関係はあるのだろうか. 例えば, 局所コンパクト空間 X のコンパクトでない閉集合 A について $\mathrm{cl}_{\alpha X} A \sim \alpha A$ となることは明らかである.

命題 1.33. 正規空間 X のコンパクトでない閉集合 A について $\mathrm{cl}_{\beta X} A \sim \beta A$.

Proof. $\widetilde{A} := \mathrm{cl}_{\beta X} A$ と置く. 任意の $f \in C^*(A)$ が $\widetilde{A}$ への拡張を持つことが示せれば, 系 1.14 より $\widetilde{A} \sim \beta A$ を得る. $f \in C^*(A)$ を任意にとり, $\mathbf{I} := [-\|f\|, \|f\|]$ と置こう. ティーチェの拡張定理により f は連続な拡張 $F : X \to \mathbf{I}$ を持つ. βX の定義と命題 1.13 から F は連続な拡張 $\widetilde{F} : \beta X \to \mathbf{I}$ を持つ. $\widetilde{f} := \widetilde{F}|_{\widetilde{A}}$ とすれば $\widetilde{f}$ は f の $\widetilde{A}$ への連続な拡張である. $\square$

$\mathcal{C}$ をある位相空間のクラスとする. 任意の $X \in \mathcal{C}$ および閉集合 $A \subset X$, 連続写像 $f : A \to Z$ に対して, f の連続な拡張 $F : X \to Z$ が存在するとき, Z をクラス $\mathcal{C}$ に対する**絶対拡張子** (**absolute extensor**, **AE** と略す) という. ティーチェの拡張定理は有界閉区間が正規空間のクラスに対する AE であることを言っている. 同様にして, 一様空間において一様 AE と呼ばれる概念が定義される. すなわち, 一様空間 Z が一様正規空間に対する**一様 AE** (**uniform AE**) であるとは, 任意の正規空間となる一様空間 X および閉集合 $A \subset X$, 一様連続写像 $f : A \to Z$ に対して, f の一様連続な拡張 $F : X \to Z$ が存在することである. 有界閉区間が一様 AE であることは Katětov [3] によって示された.

命題 1.34. 一様正規空間 $(X, \mathcal{U})$ のコンパクトでない閉集合 A について $\mathrm{cl}_{u_{\mathcal{U}}X} A \sim u_{\mathcal{U}|_A} A$.

Proof. $\widetilde{A} := \mathrm{cl}_{u_{\mathcal{U}}X} A$ と置く. A を定義域とする $\widetilde{A}$ に拡張可能な有界連続関数全体が A 上の有界一様連続関数全体に一致することを示せば, 系 1.14 より $\widetilde{A} \sim u_{\mathcal{U}|_A} A$ を得る.

有界な一様連続関数 $f : (A, \mathcal{U}|_A) \to \mathbb{R}$ を任意に取り, $\mathbf{I} := [-\|f\|, \|f\|]$ と置こう. $\mathbf{I}$ は一様 AE であるから, f は一様連続な拡張 $F : (X, \mathcal{U}) \to \mathbf{I}$ を持つ. $u_{\mathcal{U}}X$ の定義と命題 1.13 から F は連続な拡張 $\widetilde{F} : u_{\mathcal{U}}X \to \mathbf{I}$ を持つ. $\widetilde{f} := \widetilde{F}|_{\widetilde{A}}$ とすれば $\widetilde{f}$ は f の $\widetilde{A}$ への連続な拡張である.

逆に, $f \in C^*(X)$ を $\widetilde{A}$ に拡張可能な関数としよう. f の $\widetilde{A}$ への拡張を $\widetilde{f}$ とすれば, ティーチェの拡張定理により $\widetilde{f}$ は $u_{\mathcal{U}}X$ 上の関数 $\widetilde{F}$ に拡張する. X への制限 $F := \widetilde{F}|_X$ は命題 1.13 により $(X, \mathcal{U})$ 上の一様連続関数であるから, その A への制限 $F|_A = f$ は $(A, \mathcal{U}|_A)$ 上の一様連続関数である. □

こういった事情は先に述べた閉集合の分離性による特徴づけと密接な関係にあり, 予告 1.32 から次が示されることになる.

予告 1.35. 固有距離空間 (X, d) のコンパクトでない閉集合 A および A 上の Higson 関数 $f : A \to [0, 1]$ に対して, $F|_A = f$ を満たす X 上の Higson 関数 $F : X \to [0, 1]$ が存在する.

予告 1.36. 固有距離空間 (X, d) のコンパクトでない閉集合 A について $\mathrm{cl}_{hX} A \sim hA$.

予告 1.35 を通して, 有界閉区間を Higson AE と呼ぶべきかどうかは読者に委ねたい.

1.5 可換 C^* 環の Gel'fand-Naimark 理論

相対コンパクト性と有界性が一致しない一般の粗空間に対して Higson コロナを定義する場合, 関数解析の基礎的な素養 (Gel'fand-Naimark 理論) を持ちださずに述べるのは非常に難しい. そこで, これに関するいくつかの事実を駆け足ながら列挙しておく. なお, ここで述べるバナッハ環および C^* 環は可換であるとする.

バナッハ環 A, B の間の連続写像 $\mathfrak{T} : A \to B$ が和・積・スカラー倍の演算を保つとき, **準同型** (**homomorphism**) という. また, A, B が単位元 $\mathbf{1}$ を含む場合は, 準同型の条件に $\mathfrak{T}(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ を加えることにする. 連続写像 $F : X \to Y$ に対して $\mathfrak{T}_F : C^*(Y) \to C^*(X)$ を $\mathfrak{T}_F(g) := g \circ F$ と定めれば, これは準同型である. 本項では, X と Y がコンパクト空間であるとして話を進めよう.

事実 1.37. コンパクト空間 X, Y の間の連続写像 $F : X \to Y$ に対して, F の全射性と $\mathfrak{T}_F$ の等長性 (単射性), F の単射性と $\mathfrak{T}_F$ の全射性はそれぞれ同値である. したがって, F が同相であることと $\mathfrak{T}_F$ が同型であることは必要十分である. また, $F' : X \to Y$ について, $\mathfrak{T}_F = \mathfrak{T}_{F'}$ と $F = F'$ は同値である.

Proof. F が全射ならば $\mathfrak{T}_F$ が等長となることは明らかである. $\mathfrak{T}_F$ が単射ならば F が全射となることの対偶を示そう. F が全射でないとすると, $y \in Y \setminus F(X)$ が存在する. $g((F(X)) = \{0\}$, $g(y) = 1$ を満たす連続関数 $g : Y \to [0, 1]$ を取れば, $\mathbf{0} \neq g$ であるが $\mathfrak{T}_F(\mathbf{0}) = \mathfrak{T}_F(g) = \mathbf{0} \in C^*(X)$ であり, ゆえに $\mathfrak{T}_F$ は単射でない.

F が単射であるとし, $H := F^{-1} : F(X) \to X$ とする. 任意の $f \in C^*(X)$ に対して, $g = f \circ H : F(X) \to \mathbb{R}$ と置けば, $g \circ F = f \circ H \circ F = f$ である. ティーチェの拡張定理より g の拡張 $g' \in C^*(Y)$ をとれば, $\mathfrak{T}_F(g') = f$ となる. ゆえに $\mathfrak{T}_F$ は全射である. 逆に F が単射でないとする. このとき $F(x) = F(x')$ を満たす $x \neq x' \in X$ が存在し, $f(x) \neq f(x')$ を満たす $f \in C^*(X)$ を取れば $f \notin \mathfrak{T}_F(C^*(Y))$ となる. つまり $\mathfrak{T}_F$ は全射でない.

$\mathfrak{T}_F = \mathfrak{T}_{F'}$ と $F = F'$ の同値性を示すには, $F \neq F'$ を仮定して $\mathfrak{T}_F \neq \mathfrak{T}_{F'}$ を示せば十分である. $F \neq F'$ とすれば, $F(x) \neq F'(x)$ を満たす $x \in X$ が存在する. そこで, $g(F(x)) \neq g(F'(x))$ を満たす $g \in C^*(Y)$ を取れば, $\mathfrak{T}_F(g)(x) = g(F(x)) \neq g(F'(x)) = \mathfrak{T}_{F'}(g)(x)$ ゆえ $\mathfrak{T}_F(g) \neq \mathfrak{T}_{F'}(g)$. したがって $\mathfrak{T}_F \neq \mathfrak{T}_{F'}$. □

まずは手始めに, コンパクト化の境界上の連続関数環について, 次の同型を確認しよう.

命題 1.38. $\widetilde{X}$ をコンパクト空間, ∂X を $\widetilde{X}$ の閉集合, $X := \widetilde{X} \setminus \partial X$ とすれば, $C_0(X)$ は自然に $C^*(\widetilde{X})$ の部分環とみなせる. このとき

$$C^*(\partial X) \simeq C^*(\widetilde{X})/C_0(X).$$

Proof. まず $C_0(X)$ が $C^*(\widetilde{X})$ の部分環とみなせることを見てみよう. 任意の $f \in C_0(X)$ に対して $\widetilde{f} : \widetilde{X} \to \mathbb{R}$ を $\widetilde{f}|_X = f$, $\widetilde{f}|_{\partial X} = \mathbf{0}$ と定め, $\widetilde{f}$ が連続であることを確認しよう. 開集合 X 上の点での連続性は f の連続性から分かるので, ∂X 上の点での連続性について考える. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $f \in C_0(X)$ であったから, $f(X \setminus K) \subset (-\varepsilon, \varepsilon)$ を満たすコンパクト集合 $K \subset X$ が存在する. そこで, $U := \widetilde{X} \setminus K$ とおけば U は ∂X の開近傍であり, $\widetilde{f}(U) \subset (-\varepsilon, \varepsilon)$. これは ∂X 上での $\widetilde{f}$ の連続性を意味する. 対応 $C_0(X) \ni f \mapsto \widetilde{f} \in C^*(\widetilde{X})$ は等長準同型であるから, $C_0(X) \hookrightarrow C^*(\widetilde{X})$ と見なしてよい. このとき, $\widetilde{f} \in C^*(\widetilde{X})$ が $\widetilde{f}|_{\partial X} = \mathbf{0}$ を満たすことと $\widetilde{f} \in C_0(X)$ となることは同値である.

次に, 同型 $\Phi : C^*(\partial X) \to C^*(\widetilde{X})/C_0(X)$ を定義しよう. 任意の $f \in C^*(\partial X)$ に対して, ティーチェの拡張定理により f の拡張 $\widetilde{f} : \widetilde{X} \to [-\|f\|, \|f\|]$ が存在する. そこで, $\Phi(f) := \widetilde{f} + C_0(X)$ とすれば, $\Phi(f)$ は f の拡張の取り方に依存しない. 何故なら, $\widetilde{f}'$ も f の拡張であるとすれば, $(\widetilde{f} - \widetilde{f}')|_{\partial X} = \mathbf{0}$ より $\widetilde{f} - \widetilde{f}' \in C_0(X)$ となるからである. Φ が求める同型写像となることを示そう. 全射性を示すために任意に $\widetilde{f} \in C^*(\widetilde{X})$ を取る. このとき $f := \widetilde{f}|_{\partial X}$ について $\Phi(f) = \widetilde{f} + C_0(X)$ であり, これは全射を意味する. 単射性を示すには $\ker \Phi = \{\mathbf{0}\}$ を言えばよい. $\Phi(f) \in C_0(X)$ とすれば, f の $\widetilde{X}$ への拡張 $\widetilde{f}$ は $C_0(X)$ に属し, $f = \widetilde{f}|_{\partial X} = \mathbf{0}$ を得る. □

次の定理の大まかな理解が本項の目標である.

定理 1.39. コンパクト空間 X, Y および準同型 $\mathfrak{T} : C^*(Y) \to C^*(X)$ に対して, $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_F$ を満たす連続写像 $F : X \to Y$ が一意に存在する.

定理 1.39 を証明するためには, 極大イデアル空間を考える必要がある. バナッハ環 B の部分集合 I が次の条件を満たすとき, **イデアル** (ideal) という:

- $\forall\, f, g \in I$, $f + g \in I$,
- $\forall\, h \in B, \forall\, f \in I$, $h \cdot f \in I$.

とくに, イデアルが $\mathbf{1}$ を含めば, それは全体 B に一致する. $\{\mathbf{0}\}$ や B を自明なイデアルといい, 自明でないイデアルのなかで包含関係に関して極大なものを**極大イデアル** (maximal ideal) という.

命題 1.40. X をコンパクト空間とする. 任意の $x \in X$ に対して $I_x := \{\, f \in C^*(X) \mid f(x) = 0 \,\}$ は $C^*(X)$ の極大イデアルである. また, $C^*(X)$ の任意の極大イデアルは I_x という形に表される. すなわち, $C^*(X)$ の極大イデアルと X は 1 対 1 に対応する.

Proof. まず I_x が極大イデアルとなることを示そう. I_x がイデアルであることは明らかである. もし I_x が極大でないとすれば, ツォルンの補題により I_x を含む極大イデアル M が存在し, $g \in M \setminus I_x$ を取ることができる. $f := g - g(x)\mathbf{1}$ とすれば $f(x) = 0$ ゆえ $f \in I_x$ であり, とくに $f \in M$. 更に $g \notin I_x$ から $g(x) \neq 0$ であり, $\mathbf{1} = (g - f)/g(x) \in M$ を得る. これは $M \neq C^*(X)$ であることに矛盾する. したがって I_x は極大イデアルである.

主張の後半も背理法により示そう. I を $C^*(X)$ の極大イデアルとし, I が I_x という形に表せないとすれば, 任意の $x \in X$ について $I \setminus I_x \neq \emptyset$ である. そこで, $f_x \in I \setminus I_x$ を取れば $f_x(x) \neq 0$

である．I はイデアルであるから $f_x(x) = 1,\ f \geq 0$ としても一般性を失わない．[13]　このとき，$\mathcal{U} := \{\, f_x^{-1}((\frac{1}{2}, \frac{3}{2})) \mid x \in X \,\}$ は X の開被覆であり，X はコンパクトであったから有限個の $x_i \in X$ $(i = 1, \cdots, n)$ を用いて $X = \bigcup_{i=1}^n f_{x_i}^{-1}((\frac{1}{2}, \frac{3}{2}))$ と表せる．$f := \sum_{i=1}^n f_{x_i} \in I$ とすれば，各 $x \in X$ について $f(x) > \frac{1}{2} > 0$ ゆえ f は逆元 $1/f$ を持つ．したがって $\mathbf{1} = (1/f) \cdot f \in I$ となり，これは I が極大イデアルであることに矛盾する．□

備考 1.41. 逆に，$C^*(X)$ の任意の極大イデアルが I_x と書けるならば，チコノフ空間 X はコンパクト空間でなければならない．

Proof. 対偶を示そう．X がコンパクトでないとすれば，有限部分被覆を持たない X の開被覆 $\mathcal{U}$ が存在する．各 $x \in X$ に対して $x \in U_x$ なる $U_x \in \mathcal{U}$ を取り，$f_x(x) = 1,\ f_x(X \setminus U_x) = \{0\}$ を満たす連続写像 $f_x : X \to [0,1]$ を取れば，$\{\, f_x \mid x \in X \,\}$ を含む最小のイデアル I は $\mathbf{1}$ を含まない．実際，$\mathbf{1} \in I$ とすれば $\mathbf{1} = \sum_{i=1}^n g_i \cdot f_{x_i}$ と書けるものの，$z \in X \setminus \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$ において $f_{x_i}(z) = 0$ より $\mathbf{1}(z) = 0$ となり矛盾する．ツォルンの補題により I を含む極大イデアル M が存在し，任意の $x \in X$ について $f_x \in M,\ f_x(x) = 1$ ゆえ，M は I_x の形には表せない．□

$C^*(X)$ の極大イデアル全体を $\mathfrak{M}$ とすれば，命題 1.40 により $\mathfrak{M}$ は X と同一視できる．さて，準同型 $\mathfrak{T} : C^*(Y) \to C^*(X)$ および極大イデアル $I_x \in \mathfrak{M}$ に対して，$\mathfrak{T}^{-1}(I_x)$ は $C^*(Y)$ の極大イデアルとなることから，再び命題 1.40 により $I_{F(x)} = \mathfrak{T}^{-1}(I_x)$ となるような $F(x) \in Y$ が存在する．この対応 $F : X \to Y$ の連続性および $\mathfrak{T}_F = \mathfrak{T}$ を確かめれば定理 1.39 は示される．

命題 1.42. $C^*(X)$ から $\mathbb{R}$ への 0 でない準同型全体と $\mathfrak{M}$ は一対一に対応する．したがって，$\mathfrak{M}$ は $\mathbb{R}^{C^*(X)}$ に埋め込むことができる．

Proof. 任意の $x \in X$ に対して，$q_{I_x} : C^*(X) \to \mathbb{R}$ を $q_{I_x}(f) := f(x)$ と定義すれば，q_{I_x} は $\ker q_{I_x} = I_x$ を満たす 0 でない準同型である．逆に任意の 0 でない準同型 $q : C^*(X) \to \mathbb{R}$ に対して，$\ker q$ は $C^*(X)$ の極大イデアルである．何故なら極大イデアルでないとすると $\ker q$ を真に含む極大イデアル J がツォルンの補題により見つかる．$g \in J \setminus \ker q$ に対して，$q(g - q(g)\mathbf{1}) = q(g) - q(g) = 0$ より $g - q(g)\mathbf{1} \in \ker q \subset J$ である．したがって $q(g)\mathbf{1} = g - (g - q(g)\mathbf{1}) \in J$ であり，$q(g) \neq 0$ から $\mathbf{1} \in J$．これは J が極大イデアルであることに反する．さて，$\ker q$ は極大イデアルであるので命題 1.40 により $\ker q = I_x$ を満たす $x \in X$ を取れば $q_{I_x} = q$ である．実際，q および q_{I_x} から導かれる自然な写像 $C^*(X)/\ker q \to \mathbb{R}$ は共に同型写像であり，$\mathbb{R}$ 上のバナッハ環同型は 1 つしかないのでこれらは一致する．これは $q_{I_x} = q$ を意味する．□

命題 1.42 による埋め込み

$$X = \mathfrak{M} \ni I_x \longmapsto q_{I_x} \in \mathbb{R}^{C^*(X)} \qquad (\text{ただし}, \forall\, g \in C^*(X),\ q_{I_x}(g) = g(x))$$

は定理 1.11 における埋め込み $e_{C^*(X)} : X \to \mathbb{R}^{C^*(X)}$ と同一のものであることに注意せよ．[14]　いま我々は，$C^*(X)$ から $\mathbb{R}$ への 0 でない準同型全体および極大イデアル空間 $\mathfrak{M}$，そしてコンパクト空間 X を $\mathbb{R}^{C^*(X)}$ の部分空間としてすべて同一のものと見なしている．

[13] 複素数値関数で考える場合は，$f'_x := \frac{1}{|f_x(x)|^2}\overline{f}_x \cdot f_x \in I$ とすれば $f'_x(x) = 1$ かつ任意の $z \in X$ について $f(z) \geq 0$．ここで，$\overline{f}$ は f の複素共役を取る関数のことである．

[14] 定理 1.11 では，X としてコンパクトでない空間を考えていたものの，コンパクトな空間に対しても同様の方法で埋め込みが定義できる．

定理 *1.39* の証明. まず $F : X \to \mathbb{R}^{C^*(Y)}$ を $F(x) := (\mathfrak{T}(g)(x))_{g\in C^*(Y)}$ と定義し, F の連続性を確かめよう. 各 $g \in C^*(Y)$ に対して, $X \ni x \mapsto \mathfrak{T}(g)(x) \in \mathbb{R}$ が連続であることを見ればよい. これは $\mathfrak{T}(g) \in C^*(X)$ より明らかである. また, 任意の $x \in X$ に対して, $F(x) : C^*(Y) \ni g \mapsto \mathfrak{T}(g)(x) \in \mathbb{R}$ が 0 でない準同型となることは $\mathfrak{T}$ が準同型であることから分かり, $F(X) \subset Y$ を得る. 以上により連続写像 $F : X \to Y$ が構成できた. $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_F$ は次で確認できる:

$$\mathfrak{T}_F(g)(x) = g \circ F(x) = g(F(x)) = g\left((\mathfrak{T}(g)(x))_{g\in C^*(Y)}\right) = \mathfrak{T}(g)(x).$$

最後の等式は, $Y \subset \mathbb{R}^{C^*(Y)}$ と見て $g : Y \to \mathbb{R}$ および $\mathrm{pr}_g|_Y : Y \to \mathbb{R}$ を同一視している. □

系 1.43. X, Y をコンパクト空間とすれば, $X \approx Y$ と $C^*(X) \simeq C^*(Y)$ は同値である. □

系 1.44. X, Y を第 1 可算公理を満たすチコノフ空間とすれば, $X \approx Y$ と $C^*(X) \simeq C^*(Y)$ は同値である.

証明の概略. $X \approx Y$ ならば $C^*(X) \simeq C^*(Y)$ となることは明らかである. 逆に $C^*(X) \simeq C^*(Y)$ を仮定しよう. 定理 1.11 において $C^*(X) = S(\beta X) \simeq C^*(\beta X)$ であったこと思い出せば $C^*(\beta X) \simeq C^*(\beta Y)$ を得る. したがって系 1.43 により $\beta X \approx \beta Y$. $\beta X \setminus X$ および $\beta Y \setminus Y$ の各元は可算近傍基を持たないことから[15], $h : \beta X \to \beta Y$ を同相写像とすれば $h(X) = Y$ でなければならない. つまり $X \approx Y$ である. □

命題 1.45. チコノフ空間 X, Y および $A_X \in \mathcal{A}(X)$, $A_Y \in \mathcal{A}(Y)$, 連続写像 $F : X \to Y$ に対して, 任意の $g \in A_Y$ について $g \circ F \in A_X$ となるならば, F は連続な拡張 $\widetilde{F} : T(A_X) \to T(A_Y)$ を持つ.

Proof. 仮定により $\mathfrak{T}_F : C^*(Y) \to C^*(X)$ が $\mathfrak{T}_F(A_Y) = A_X$ を満たし, 制限による準同型 $\mathfrak{T}_F|_{A_Y} : A_Y \to A_X$ は準同型 $\widetilde{\mathfrak{T}} : C^*(T(A_Y)) \to C^*(T(A_X))$ を導く. すなわち, 各 $g \in C^*(T(A_Y))$ に対して, $\mathfrak{T}_F(g|_Y) \in A_X$ の $T(A_X)$ への拡張が $\widetilde{\mathfrak{T}}(g)$ となる. よって, 定理 1.39 により $\mathfrak{T}_{\widetilde{F}} = \widetilde{\mathfrak{T}}$ を満たす連続写像 $\widetilde{F} : T(A_X) \to T(A_Y)$ が存在する. 以下, $\widetilde{F}$ が F の拡張であることを確認しよう. 拡張でないとすれば $\widetilde{F}(x) \neq F(x)$ を満たす $x \in X$ が存在し, 更に $g(\widetilde{F}(x)) \neq g(F(x))$ を満たす $g \in C^*(T(A_Y))$ が取れる. このとき,

$$\widetilde{\mathfrak{T}}(g)(x) = g \circ \widetilde{F}(x) \neq g \circ F(x) = g|_Y \circ F(x) = \mathfrak{T}_F(g|_Y)(x).$$

これは $\mathfrak{T}_F(g|_X)$ の拡張が $\widetilde{\mathfrak{T}}(g)$ であることに矛盾する. □

最後に, 一般の可換 C^* 環について簡単に補足しておこう. まず, これまでの議論における実数値関数を複素数値関数にしても全く同様の主張が成立することは容易に分かるだろう. 一方, C を抽象的な単位的可換 C^* 環とし, その極大イデアル全体の集合を $\mathfrak{M}$ としよう. 任意の $I \in \mathfrak{M}$ に対して, $C/I \simeq \mathbb{C}$ となることは想像に難くない (Gel'fand-Mazur の定理). そこで商写像 $q_I : C \to C/I \simeq \mathbb{C}$ と I を同一視すれば, $\mathfrak{M}$ は直積空間 $\mathbb{C}^C$ の部分集合とみなすことができる. $\mathfrak{M}$ に $\mathbb{C}^C$ の部分空間としての位相を入れた位相空間を**極大イデアル空間**という. q_I の作用素ノルムが 1 であることを確かめることで $\mathfrak{M}$ のコンパクト性が分かり, 更に次を得る.

[15]事実 1.16 の議論を任意の正規空間に拡張することは容易である. 実は, より一般に, 事実 1.16 はチコノフ空間においても成立することが知られている. 詳細は [5] を参照されたい.

定理 1.46 (Gel'fand-Naimark). 単位的可換 C^* 環 C の極大イデアル空間を $\mathfrak{M}$ とすれば,

$$C \simeq \mathcal{C}^*(\mathfrak{M}).$$

証明の概略. $f \in C$ に対して, $\Phi(f) \in \mathcal{C}^*(\mathfrak{M})$ を $\Phi(f)(I) := q_I(f)$ と定義すれば, 対応 $\Phi : C \to \mathcal{C}^*(\mathfrak{M})$ は準同型である (これを **Gel'fand 表現**という). あとは Φ が C^* 環としての同型であることを確かめればよい.[16] □

例 1.47. チコノフ空間 X および $A \in \mathcal{A}(X)$ について, $A = S(T(A)) \simeq C^*(T(A))$ であった. したがって, A の極大イデアル空間は $T(A)$ に一致する. とくに $C^*(X)$ の極大イデアル空間は βX である.

[16]Stone-Weierstrass の近似定理により全射性は直ちに得られるものの, 単射性は明らかではない.

2 Higson コンパクト化とその性質

2.1 導入

粗構造に関するいくつかの定義を述べておこう．ここでの定義および記号はすべて Roe [7] に準ずる．X を集合とする．$E, F \subset X \times X$ および $K \subset X$ に対して, Δ_X および E^{-1}, $E \circ F$, $E[K]$ をそれぞれ次のように定義する:

- $\Delta_X := \{\, (x,x) \mid x \in X \,\}$,
- $E^{-1} := \{\, (x,y) \in X^2 \mid (y,x) \in E \,\}$,
- $E \circ F := \{\, (x,z) \in X^2 \mid \exists\, y \in X \text{ s.t. } (x,y) \in E$ かつ $(y,z) \in F \,\}$,
- $E[K] := \{\, x \in X \mid \exists\, y \in K \text{ s.t. } (x,y) \in E \,\}$.

$E \subset X^2$ が $E^{-1} = E$ を満たすとき**対称** (**symmetry**) であるという．各 $x \in X$ について $E[\{x\}]$ を $E[x]$ と略記しよう．

定義 2.1. X^2 の部分集合族 $\mathcal{E}$ が次の条件を満たすとき, $\mathcal{E}$ を X の**粗構造** (**coarse structure**) と呼び, 集合と粗構造の組 $(X, \mathcal{E})$ を**粗空間** (**coarse space**) という:

- $\Delta_X \in \mathcal{E}$,
- $E \in \mathcal{E},\ F \subset E \Longrightarrow F \in \mathcal{E}$,
- $E \in \mathcal{E} \Longrightarrow E^{-1} \in \mathcal{E}$,
- $E, F \in \mathcal{E} \Longrightarrow E \circ F \in \mathcal{E},\ E \cup F \in \mathcal{E}$.

粗構造 $\mathcal{E}$ の各元を**制御集合** (**controlled set**) または**近縁** (**entourage**) と呼ぶ．いくつかの粗構造の例は, 次項の Higson 関数の定義の後に述べよう． 集合 Z から粗空間 X への 2 つの写像 $f, g : Z \to X$ が $\{\, (f(z), g(z)) \mid z \in Z \,\} \in \mathcal{E}$ を満たすとき, f と g は**近い** (**$\mathcal{E}$-close**) という．

定義 2.2. 粗空間 $(X, \mathcal{E})$ の部分集合 B が**有界** (**bounded**) であるとは, 次の同値条件 (a)〜(d) のいずれかを満たすときと定義する (cf. Proposition 2.16 of [7]):

(a) $B \times B \in \mathcal{E}$, (b) $\exists\, p \in X \text{ s.t. } B \times \{p\} \in \mathcal{E}$,

(c) $\exists\, p \in X, \exists\, E \in \mathcal{E} \text{ s.t. } B = E[p]$, (d) 包含写像 $B \hookrightarrow X$ は定値関数と $\mathcal{E}$-close.

とくに, 有界集合の部分集合は有界である．更に次が成り立つ．

事実 2.3 (Proposition 2.19(a) of [7]). B を有界集合, $E \in \mathcal{E}$ とすれば, $E[B]$ も有界集合である．

粗空間 X が位相空間である場合, その位相と粗構造の性質には何らかの関係があることが望ましい．任意の相対コンパクト集合 $K \subset X$ について $E[K]$ および $E^{-1}[K]$ が相対コンパクトとなるとき, $E \subset X^2$ は**固有** (**proper**) であるという．

定義 2.4. パラコンパクト空間 X の粗構造 $\mathcal{E}$ が次の (i) および (ii) を満たすとき, $\mathcal{E}$ は**固有** (**proper**) であるといい, $(X, \mathcal{E})$ を**固有粗空間** (**proper coarse space**) と呼ぶ:

(i) $\exists\, E \in \mathcal{E}$ s.t. E : Δ_X の近傍.

(ii) 任意の有界集合は相対コンパクトである.

固有粗空間は, その定義から局所コンパクト空間である. 粗空間について実際に議論する場合, $\mathcal{E}$ の**粗連結** (**coarsely connected**) 性, すなわち任意の $x, y \in X$ について $\{(x, y)\} \in \mathcal{E}$ となることを仮定することが多い. 粗連結な粗空間では有界集合の有限和は再び有界集合になる (Proposition 2.19(b) of [7]). 更に, 粗連結な固有粗空間では相対コンパクト性と有界性が同値になり, 任意の制御集合は固有となる (Proposition 2.23 of [7]).

命題 2.5. $E \subset X^2$ を Δ_X の近傍とすれば, 部分集合 $A \subset X$ について, $\mathrm{cl}_X A \subset E[A]$.

Proof. 任意の $x \in \mathrm{cl}_X A$ に対して, E は $(x, x) \in X^2$ の近傍であるから, $U^2 \subset E$ を満たす x の近傍 U が存在する. このとき, $a \in U \cap A$ を取れば $(x, a) \in U^2 \subset E$ ゆえ $x \in E[A]$. $\square$

2.2 粗空間の例とその Higson 関数

$(X, \mathcal{E})$ を粗空間とする. $f \in C^*(X)$ が次の条件 (**Higson 条件**) を満たすとき **Higson 関数** (**$\mathcal{E}$-Higson**) であるという[17]:

$$\forall\, E \in \mathcal{E},\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, B \subset X\text{: 有界} \quad \text{s.t.} \quad \forall\, x \in X \setminus B,\ \operatorname{diam} f(E[x]) < \varepsilon.$$

ここで, $\operatorname{diam} A := \sup\{\, |a - b| \mid a, b \in A \,\}$ は $A \subset \mathbb{R}$ の直径を表す. $\mathcal{E}$-Higson 関数全体を $C_h(X, \mathcal{E})$ と書き, $\mathcal{E}$ が明白な場合は $C_h(X)$ と略記しよう.

Higson 条件のもう一つの言い換えを述べよう. $\mathbf{d}f : X^2 \to \mathbb{R}$ を $\mathbf{d}f(x, y) := f(x) - f(y)$ で定義する. 更に, 連続関数 $g : X^2 \to \mathbb{R}$ が $E \in \mathcal{E}$ について $g|_E \in C_0^{\mathcal{E}}(E)$ となることを次で定義する[18]:

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, B \subset X : \text{有界, s.t. } (x, y) \in E \setminus B^2 \implies |g(x, y)| < \varepsilon.$$

Roe [7] では, 次でもって Higson 関数を定義していた:

事実 2.6. 相対コンパクト性と有界性が同値になる局所コンパクト粗空間 $(X, \mathcal{E})$ において, $f \in C^*(X)$ が Higson 関数であることと任意の $E \in \mathcal{E}$ について $\mathbf{d}f|_E \in C_0^{\mathcal{E}}(E)$ となることは同値である.

Proof. f を Higson 関数とする. 任意に $E \in \mathcal{E}$ および $\varepsilon > 0$ を取ろう. E を大きく取りなおし, E は対称かつ Δ_X を含むとする.[19] f は Higson 関数であったから, $x \in X \setminus B$ ならば $\operatorname{diam} f(E[x]) < \varepsilon$ となるような有界集合 $B \subset X$ が存在する. このとき, 任意の $(x, y) \in E \setminus B^2$ について, $x \notin B$ ならば $x, y \in E^{-1}[x] = E[x]$ ゆえ $|f(x) - f(y)| \le \operatorname{diam} f(E[x]) < \varepsilon$ を得る. $y \notin B$ の場合も $x, y \in E[y]$ から $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ が導かれ, $\mathbf{d}f|_E \in C_0^{\mathcal{E}}(E)$ を得る.

逆に, 任意の $E \in \mathcal{E}$ について $\mathbf{d}f \in C_0^{\mathcal{E}}(E)$ を仮定しよう. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\mathbf{d}f(E \setminus B^2) \subset (-\varepsilon, \varepsilon)$ を満たす有界集合 $B \subset X$ を取れば, $x \in X \setminus B$ ならば任意の $y \in E[x]$ について $(y, x) \in E \setminus B^2$ ゆえ $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. したがって f は Higson 関数である. $\square$

[17] 本稿では冒頭から, 必ずしも固有でない粗空間も含めた形で Higson 関数を定義する.
[18] E は局所コンパクト空間とは限らないことに注意せよ.
[19] $E' := E \cup E^{-1} \cup \Delta_X$ を考えよ.

例 2.7. 距離空間 (X,d) において, 次で定義される粗構造 $\mathcal{E}_d$ を**有界粗構造** (**bounded coarse structure**) という:

$$E \in \mathcal{E}_d \underset{\text{def}}{\iff} \sup\{\, d(x,y) \mid (x,y) \in E \,\} < \infty.$$

この粗構造においては, 距離空間における部分集合の有界性 (すなわち直径の有界性) と粗空間における有界性 (定義 2.2) は同値になる. 固有距離空間[20]の粗構造 $\mathcal{E}_d$ に対して, $f \in C^*(X)$ が Higson 関数であるとは次を満たすことと同値である:

$$\forall\, M > 0,\ \lim_{x \to \infty} \operatorname{diam} f(B(x,M)) = 0,$$

ただし, $B(x,M) := \{\, y \in X \mid d(x,y) < M \,\}$ を x の***M*-開球**とする. 例えば, $X = \mathbb{R}$ において $\sin x$ は Higson 関数ではなく, $\sin\sqrt{x}$ は Higson 関数である. より一般に, 微分可能な有界関数 f に対して, $df/dx \in C_0(\mathbb{R})$ ならば f は Higson 関数である.

例 2.8. 局所コンパクトな距離空間 (X,d) (固有距離空間でなくてもよい) に対して, 次で定義される $\mathcal{E}_d^0$ は粗構造になり, $\boldsymbol{C_0}$**粗構造**と呼ばれる[21]:

$$E \in \mathcal{E}_d^0 \underset{\text{def}}{\iff} \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, K \subset X : \text{コンパクト}\ \text{ s.t. }\ (x,y) \in E \setminus K^2 \ \Rightarrow\ d(x,y) < \varepsilon.$$

Proof. ここでは $E, F \in \mathcal{E}_d^0$ ならば $E \circ F \in \mathcal{E}_d^0$ となることのみを確認しよう. $\varepsilon > 0$ を任意に取ろう. $E \cup F \in \mathcal{E}_d^0$ ゆえ次を満たすコンパクト集合 $K_0 \subset X$ が存在する:

$$(x,y) \in (E \cup F) \setminus {K_0}^2 \implies d(x,y) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

X の局所コンパクト性から, 十分小さい ε' $(0 < \varepsilon' < \varepsilon/2)$ について, $B(K_0, \varepsilon')$ は相対コンパクト集合になる. 更に $B(K_0, \varepsilon')$ を含む十分大きなコンパクト集合 K を次を満たすように取る:

$$(x,y) \in (E \cup F) \setminus K^2 \implies d(x,y) < \varepsilon'.$$

このとき, 任意の $(x,z) \in (E \circ F) \setminus K^2$ に対して, $x \notin K$ または $z \notin K$ である. $x \notin K$ の場合について話を進めよう. $(x,y) \in E$ および $(y,z) \in F$ を満たす $y \in X$ を取れば, $(x,y) \in E \setminus K^2$ ゆえ $d(x,y) < \varepsilon'$ である. また, $y \notin K_0$ である. 何故なら, もし $y \in K_0$ とすれば, $d(x, K_0) < \varepsilon'$ となり $x \in B(K_0, \varepsilon') \subset K$ となり $x \notin K$ に矛盾する. ゆえに $(y,z) \in F \setminus {K_0}^2$ であるから $d(y,z) < \varepsilon/2$. したがって三角不等式より $d(x,z) < \varepsilon$ を得る. $y \notin K$ の場合も同様の議論が成立し, 以上より $E \circ F \in \mathcal{E}_d^0$ である. □

C_0 粗構造では, 相対コンパクト性と有界性が同値になる. とくに d が固有距離の場合, 直径の有界性と粗空間における有界性は同値である.

Proof. 相対コンパクトならば有界となることは明らかである. 逆を示そう. 有界集合 $B \subset X$ が 2 点以上を含む場合のみを考え $\operatorname{diam} B > 0$ とし, B が相対コンパクトでないと仮定して矛盾を導こう. $B \times B \in \mathcal{E}_d^0$ ゆえ任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $(x,y) \in B^2 \setminus K^2$ ならば $d(x,y) < \varepsilon$ となるようにコンパクト集合 K が取れる. B は相対コンパクトでないから $x_0 \in B \setminus K$ が存在し, このとき任意の $y \in B$ について $(x_0, y) \in B^2 \setminus K^2$ ゆえ $d(x_0, y) < \varepsilon$. つまり $\operatorname{diam} B < 2\varepsilon$ である. $\varepsilon > 0$ の任意性より $\operatorname{diam} B \leq 0$ となり, これは $\operatorname{diam} B > 0$ に矛盾する. □

[20]有界閉集合であることとコンパクト性が同値になる X 上の距離を**固有距離** (**proper metric**) と呼ぶ. 固有距離空間は可分な完備距離空間である.

[21]X の一様構造に対する C_0 粗構造も同様に定義できるものの, ここでは過度の一般化は避けておこう.

C_0 粗構造について $C_h(X, \mathcal{E}_d^0) = C_u(X, \mathcal{U}_d)$, すなわち $f \in C^*(X)$ が $\mathcal{E}_d^0$-Higson であることと一様連続関数であることは同値である (cf. [4]).

Proof. ($\Leftarrow$) $f\colon X \to \mathbb{R}$ を有界な一様連続関数であるとし, 任意に制御集合 E および $\varepsilon > 0$ を取ろう. f の一様連続性より $d(x,y) < \delta$ ならば $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ を満たすような $\delta > 0$ が存在する. 更に, $(x,y) \in E \setminus K^2$ ならば $d(x,y) < \delta$ となるようにコンパクト集合 $K \subset X$ が取れる. このとき, 任意の $(x,y) \in E \setminus K^2$ について $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ となり, ゆえに f は Higson 関数である.

($\Rightarrow$) 対偶を示すために, $f \in C^*(X)$ が一様連続でないと仮定しよう. すなわち, 次を満たす $\varepsilon > 0$ および点列 $x_n, y_n \in X$ が存在する:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad d(x_n, y_n) < 1/n \quad \text{and} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$

このとき, 集合 $A := \{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ は相対コンパクトではない. 実際, もし A が相対コンパクトであるとすれば, 十分小さい $\delta > 0$ について $B(A, \delta)$ 上で f は一様連続となり, 十分大きい $n \in \mathbb{N}$ について $B(A, \delta)$ は x_n, y_n を含む. これは x_n, y_n の取り方に矛盾する. さて, $E = \{(x_n, y_n) \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ とすれば E は制御集合である. 任意の有界集合 $B \subset X$ に対して, B は相対コンパクトであるから $A \setminus B \neq \emptyset$ ゆえ $x_N \in A \setminus B$ を取れば, $(x_N, y_N) \in E \setminus B^2$ かつ $|f(x_N) - f(y_N)| \geq \varepsilon$ となる. したがって f は Higson 関数ではない. □

例 2.9. 局所コンパクト空間 X に対して, X^2 のコンパクト部分集合全体で生成される粗構造を**離散粗構造** (**discrete coarse structure**) という.[22] すなわち, 次で定義される粗構造である:

$$\mathcal{E} := \{\, A \subset X \times X \mid A \setminus \Delta_X : X^2 \text{ の相対コンパクト部分集合} \,\}.$$

離散粗構造において, $C_h(X) = C^*(X)$ となることは定義よりすぐに分かる.

例 2.10. 局所コンパクト空間 X において, 固有な制御集合すべてを集めた粗構造を**密着粗構造** (**indiscrete coarse structure**) という. X がパラコンパクトであるとすれば $C_h(X) = C_0(X)^+$ である.

Proof. まず, 密着粗構造において相対コンパクト性と有界性が同値になることを示そう. $K \subset X$ が相対コンパクトであるとすれば, $K^2 \subset X^2$ は固有であり, ゆえに K^2 は制御集合となり, K は有界である. 逆に K が有界であるとすれば, $K = E[p]$ となるような制御集合 $E \subset X^2$ および $p \in X$ が存在し, このとき E は固有なので $E[p]$ は相対コンパクトである. 以上のことから, 後で述べる命題 2.14 にて, 一般論として $C_0(X)^+ \subset C_h(X)$ を示すことができる. 以下では $C_h(X) \subset C_0(X)^+$ を示そう.

$f \in C_h(X)$ を任意に取り, 点列 $x_n, y_n \longrightarrow \infty$ に対して, $|f(x_n) - f(y_n)| \longrightarrow 0$ $(n \to \infty)$ が示せれば, 命題 1.20 より $f \in C_0(X)^+$ を得る. $x_n, y_n \longrightarrow \infty$ とすれば $E := \{\, (x_n, y_n) \,|\, n \in \mathbb{N} \,\}$ は固有な制御集合であるから, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して,

$$(x,y) \in E \setminus K^2 \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

となるように有界集合 $K \subset X$ が取れる. 相対コンパクト性と有界性は同値であったから K は相対コンパクトである. $x_n, y_n \longrightarrow \infty$ より, 十分大きい n について $x_n, y_n \notin K$ となり, ゆえに $|f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon$. したがって, $|f(x_n) - f(y_n)| \longrightarrow 0$ $(n \to \infty)$ である. □

[22] Roe [7] では, 離散空間に限って定義していた.

例 2.11 (Example 2.44 of [7]). 離散空間 X において, 次で定義される粗構造 $\mathcal{E}$ を**普遍有界幾何構造** (**universal bounded geometry structure**) という:

$$E \in \mathcal{E} \underset{\text{def}}{\iff} \exists\, n \in \mathbb{N} \ \text{ s.t. } \ \forall\, x \in X,\ |E[x]|,\ |E^{-1}[x]| \leq n,$$

ここで, $|A|$ は集合 A の濃度を表す. このとき $C_h(X, \mathcal{E}) = C_0(X)^+$ である.

Proof. 相対コンパクト性と有界性の同値性は容易に確かめられ, したがって例 2.10 の証明と同様の理由で $C_h(X) \subset C_0(X)^+$ のみを示そう. $f \in C_h(X)$ を任意に取り, $x_n, y_n \longrightarrow \infty$ を仮定する. 背理法を用いて $|f(x_n) - f(y_n)| \longrightarrow 0$ を示そう. $|f(x_n) - f(y_n)| \longrightarrow 0$ でないとすれば部分列を取りなおすことで, ある $\delta > 0$ について $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \delta$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ としてよい. $x_n, y_n \longrightarrow \infty$ であったから, 更に部分列を取りなおせば $E := \{\, (x_n, y_n) \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ は制御集合になる. f は Higson 関数だったので,

$$(x, y) \in E \setminus K^2 \implies |f(x) - f(y)| < \delta$$

となるようなコンパクト集合 $K \subset X$ が存在する. $x_n, y_n \longrightarrow \infty$ より, 十分大きい n について $x_n, y_n \notin K$ となり, ゆえに $|f(x_n) - f(y_n)| < \delta$. これは x_n, y_n の取り方に矛盾する. 以上より $|f(x_n) - f(y_n)| \longrightarrow 0$ であり, 命題 1.20 より $f \in C_0(X)^+$ を得る. □

例 2.12. X^2 の冪集合 $\mathcal{E} = \mathfrak{P}(X^2)$ を**極大粗構造** (**maximal coarse structure**) という. この粗構造においては, 有界集合として全空間 X が取れるため $C_h(X) = C^*(X)$ となる. あるいは, X を局所コンパクト空間とし, Higson 関数の定義における "有界" を "相対コンパクト" に置き換えた別の定義を採用すれば, $C_h(X)$ は定数関数全体に一致する.[23]

粗構造 $\mathcal{E}$ がどういった条件を満たせば $C_h(X, \mathcal{E}) \in \mathcal{A}(X)$ となるか考えよう.

命題 2.13 (Proposition 2.36 of [7]). $C_h(X)$ は $C^*(X)$ の部分バナッハ環である.

Proof. $C_h(X)$ が和で閉じていることは明らかであり, 積について閉じていることは次の式による:

$$f \cdot g(x) - f \cdot g(y) = (f(x) - f(y))g(x) + f(y)(g(x) - g(y)).$$

Higson 関数の一様収束先が Higson 関数となることも定義から容易に示せ, 以上より $C_h(X)$ はバナッハ環となる. □

命題 2.14. 相対コンパクト性と有界性が同値になるような局所コンパクト粗空間 X において, $C_0(X)^+ \subset C_h(X)$. したがって, 命題 1.21 より $C_h(X) \in \mathcal{A}(X)$.

Proof. 任意の $f \in C_0(X)^+$ および制御集合 E, $\varepsilon > 0$ に対して, $\operatorname{diam} f(X \setminus K) < \varepsilon$ を満たすような有界集合 K が存在する. E を十分大きく取り, E は対称であるとしよう. このとき, $E[K]$ は有界集合であり (事実 2.3), $x \in X \setminus E[K]$ とすれば, $E[x] \cap K = \emptyset$ である. 何故なら, もし $y \in E[x] \cap K$ が取れるとすれば, $(y, x) \in E$ ゆえ $(x, y) \in E$ となり $x \in E[K]$ となってしまう. したがって, $E[x] \subset X \setminus K$ であり $\operatorname{diam} f(E[x]) < \varepsilon$. 以上より $f \in C_h(X)$ となる. □

[23] "有界" を "相対コンパクト" に置き換える利点は, 粗構造全体と対応する Higson 関数環との間に逆向きの順序関係が保たれることにある (cf. 命題 2.19). 欠点は, 一般の粗空間に対する Higson コロナを定義する際に, Higson 関数を定義し直さなければならない点にある. いずれにせよ, 極大粗空間については不毛な議論しか生まれないので深入りしないように.

上の命題は次の命題の系として得ることもできる.[24]

命題 2.15. 粗空間 X の各点が有界近傍をもつとすれば $C_h(X) \in \mathcal{A}(X)$.

Proof. $C_h(X)$ が X の位相を生成することを示そう. 任意の閉集合 $F \subset X$ および $x \in X \setminus F$ を取れば. $U \cap F = \emptyset$ となるような x の有界近傍が存在する. $f(x) = 1$, $f(X \setminus U) = \{0\}$ を満たす $f \in C^*(X)$ を取れば, f は Higson 関数である.[25] 以上より $C_h(X)$ は X の位相を生成する. □

2.3 Higson コンパクト化

定義 2.16. $C_h(X, \mathcal{E}) \in \mathcal{A}(X)$ を満たす粗空間 $(X, \mathcal{E})$ に対して, コンパクト化 $h_{\mathcal{E}}X := T(C_h(X, \mathcal{E}))$ を X の **Higson コンパクト化**と呼び, 粗構造 $\mathcal{E}$ が明らかな場合は hX と書く.

Higson コンパクト化そのものは非常に一般的な粗構造において定義可能であるものの, coarse geometry において有効な対象であるためには粗構造をある程度制限しなければならない.

例 2.17. ヒルベルト空間 ℓ_2 の格子点 $\ell_2 \cap \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ や端点を含まない半直線 $(0, \infty)$ の有界粗構造を考えよう. 局所コンパクトなこれらの空間には, コンパクトでない有界閉集合 A が存在する. このような空間の Higson コンパクト化を考えるということは, A をコンパクト化させるために A の付近に $\beta A \setminus A$ と同相な空間を貼り付けることを意味する. こういった境界上の点は, 巨視的な立場では全くの不要物である.

以上のような事情から, 3.2 項で Higson コロナの一般化を行うまでの間, 命題 2.14 の仮定を満たすような粗空間, すなわち,

$$\boxed{\text{相対コンパクト}} \iff \boxed{\text{有界}}$$

を満たす局所コンパクト粗空間のみを我々は考えることにする. ただし, $\mathcal{E}$ が Δ_X のある近傍を含むことは要求せず, したがって固有粗空間でなくてもよい.

事実 2.18. 上の仮定の下では, 有界集合の閉包は有界であり, 有界閉集合であることとコンパクト性は一致する. また, 任意の制御集合は固有となる. □

X の粗構造 $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ について, $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}'$ を満たすとき $\mathcal{E}'$ は $\mathcal{E}$ よりも**粗い (coarser)** という. 粗構造の包含関係とそれらの Higson コンパクト化の大小は逆の関係にある:

命題 2.19. $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}'$ ならば $h_{\mathcal{E}}X \geq h_{\mathcal{E}'}X$.

Proof. いま我々が考えている立場では粗構造によらずに有界性が決まるため, 粗構造が小さければ小さいほど Higson 条件を満たす関数は多くなる. ゆえに $C_h(X, \mathcal{E}) \supset C_h(X, \mathcal{E}')$ であり, 定理 1.11 より $h_{\mathcal{E}}X \geq h_{\mathcal{E}'}X$. □

定義 2.20. Higson コンパクト化の境界 $h_{\mathcal{E}}X \setminus X$ を **Higson コロナ**と呼び, $\nu_{\mathcal{E}}X$ と書く. いま, 我々は X に局所コンパクト性を仮定しているので, Higson コロナはコンパクトな空間である.

[24] 次節で述べる $\mathcal{B}_0(X) \subset \mathcal{B}_h(X)$ との関連で, 命題 2.14 の直接証明を述べておく必要があった.

[25] $f \in C_0(X)$ とは限らない (そもそも X が局所コンパクトでなければ $C_0(X)$ は定義できない) ものの, f が Higson 関数であることは命題 2.14 の証明と同様の論法で示せる.

2.4 粗コンパクト化

粗コンパクト化を定義するために位相的粗構造について述べよう.

定義 2.21 (Theorem 2.27 of [7]). 局所コンパクト空間 X のコンパクト化 $\widetilde{X}$ および $E \subset X^2$ について, 次の (a)〜(c) はそれぞれ同値である:

(a) $(\mathrm{cl}_{\widetilde{X}\times\widetilde{X}} E) \setminus X \times X \subset \Delta_{\partial X}$,

(b) E は固有であり, $\forall\,(x_\lambda, y_\lambda) \in E,\ x_\lambda \longrightarrow \omega \in \partial X\ (\lambda \in \Lambda) \implies y_\lambda \longrightarrow \omega\ (\lambda \in \Lambda)$,

(c) E は固有であり,
$\forall\,\omega \in \partial X,\ \forall\,V \subset \widetilde{X}$: ω の近傍, $\exists\,U \subset V$: ω の近傍 s.t. $E \cap (U \times (X \setminus V)) = \emptyset$.

上の (a)〜(c) のいずれかを満たす (したがってすべてを満たす) 集合 $E \subset X^2$ たち全体で構成される X^2 の部分集合族 $\mathcal{E}_{\widetilde{X}}$ は粗構造の条件を満たし, これを $\widetilde{X}$ による**位相的粗構造** (**topological coarse structure**) と呼ぶ.

位相的粗構造では相対コンパクト性と有界性は一致する.[26] 次に述べるように, 位相的粗構造は固有であるとは限らない.

例 2.22 (Example 2.31 of [7]). 局所コンパクトなパラコンパクト空間 X について, βX の位相的粗構造は離散粗構造に一致する.

Proof. $\mathcal{E}$ を離散粗構造とする. $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}_{\beta X}$ は明らかである. $\mathcal{E}_{\beta X} \subset \mathcal{E}$ を示すために任意に $E \in \mathcal{E}_{\beta X}$ を取ろう. E が対称であるとしても一般性を失わない. もし $E \notin \mathcal{E}$ であるとすれば, 任意のコンパクト集合 $K \subset X$ に対して $E \setminus (\Delta_X \cup K^2) \neq \emptyset$ であるから, $x_K \neq y_K$ および $(x_K, y_K) \in E$ を満たす $x_K \in X \setminus K$, $y_K \in X$ が存在する. このとき, $A := \{\, x_K \mid K \subset X$: コンパクト $\}$ は相対コンパクト集合でないから, 事実 1.10 により A は離散無限部分集合 $\{\, x_{K_n} \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ を持つ. 以下, 記号を省略し, $x_n := x_{K_n}$, $y_n := y_{K_n}$ として話を進めよう. $B := \{\, y_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ も相対コンパクトではない. 何故なら, もし B が相対コンパクトであるとすると, E が固有であること, および $A \subset E[B]$ から, A も相対コンパクトでなければならない. したがって, 部分列を取ることで B も離散集合であるとしてよい. 更に部分列を取ることで, A と B は交わらないとしてもよく, ゆえに $\mathrm{cl}_{\beta X} A$ と $\mathrm{cl}_{\beta X} B$ も交わらない (命題 1.30). $\omega \in (\mathrm{cl}_{\beta X} A) \setminus X$ について, A 上の点列 $x_{n_\gamma} \longrightarrow \omega\ (\gamma \in \Gamma)$ を取れば, y_{n_γ} が ω に収束することはなく, これは $E \in \mathcal{E}_{\beta X}$ に矛盾する. 以上より $E \in \mathcal{E}$ である. □

例 2.22 は, 一般の局所コンパクト空間については成立しない. 極端な話をいえば, $\beta X = \alpha X$ となるような空間では次の事実により $\mathcal{E}_{\beta X}$ は密着粗構造にならねばならない.

例 2.23 (Example 2.30 of [7]). αX の位相的粗構造は密着粗構造に一致する.

Proof. 任意の固有な $E \subset X^2$ が $E \in \mathcal{E}_{\alpha X}$ となることを示せばよい. $(x_\lambda, y_\lambda) \in E$ および $x_\lambda \longrightarrow \infty\ (\lambda \in \Lambda)$ であると仮定して, $y_\lambda \longrightarrow \infty$ を示そう. すなわち,

$$\forall\, K \subset X : \text{コンパクト集合},\ \exists\,\lambda_0 \in \Lambda \ \text{ s.t. }\ \lambda \geq \lambda_0 \implies y_\lambda \in X \setminus K$$

[26] 実際, 任意の相対コンパクト集合 $K \subset X$ について K^2 は定義 2.21 の条件を満たし, ゆえに制御集合となるから K は有界である. 逆に K が有界であるとすれば, $K = E[p]$ を満たす制御集合 E および点 $p \in X$ が存在し, 条件 (b) より E は固有なので $E[p]$ は相対コンパクトである.

を言いたい. そうでないと仮定すれば, あるコンパクト集合 $K \subset X$ において次が成立する:

$$\forall\ \lambda \in \Lambda,\ \exists\ \lambda' \geq \lambda\ \ \text{s.t.}\ \ y_{\lambda'} \in K.$$

そこで, $A := \{\, x_{\lambda'} \mid \lambda \in \Lambda \,\}$ とすれば $A \subset E[K]$ である. E は固有であるから A は相対コンパクトであり, これは $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の部分有向点列 $(x_{\lambda'})_{\lambda\in\Lambda}$ が ∞ に収束することに矛盾する. したがって y_λ も ∞ に収束し, $E \in \mathcal{E}_{\alpha X}$ を得る. □

命題 2.24. $\gamma X, \delta X \in \mathcal{K}(X)$ について, $\gamma X \leq \delta X \Longrightarrow \mathcal{E}_{\gamma X} \supset \mathcal{E}_{\delta X}$.

Proof. $p : \delta X \to \gamma X$ を射影とし, $\bar{p} := p \times p : (\delta X)^2 \to (\gamma X)^2$ とする. 任意に $E \in \mathcal{E}_{\delta X}$ をとれば, 定義 2.21 の条件 (a) を E は満たすので $(\mathrm{cl}_{(\delta X)^2} E) \setminus X^2 \subset \Delta_{\delta X \setminus X}$ が成り立つ. $\mathrm{cl}_{(\delta X)^2} E$ はコンパクトであり, $\bar{p}(\mathrm{cl}_{(\delta X)^2} E)$ は E を含む $(\gamma X)^2$ の閉集合であるから, $\mathrm{cl}_{(\gamma X)^2} E \subset \bar{p}(\mathrm{cl}_{(\delta X)^2} E)$ である. したがって,

$$(\mathrm{cl}_{(\gamma X)^2} E) \setminus X^2 \subset \bar{p}(\mathrm{cl}_{(\delta X)^2} E) \setminus X^2 \subset \bar{p}((\mathrm{cl}_{(\delta X)^2} E) \setminus X^2) \subset \bar{p}(\Delta_{\delta X \setminus X}) = \Delta_{\gamma X \setminus X}.$$

ゆえに $E \in \mathcal{E}_{\gamma X}$. □

粗構造 $(X, \mathcal{E})$ に対して, X のコンパクト化 $\widetilde{X}$ が**粗コンパクト化** (**coarse compactification**) であるとは, $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}_{\widetilde{X}}$ を満たすことをいう. やや抽象的な定義に感じるものの, 次の命題により, これは Higson コンパクト化よりも小さいコンパクト化であることと同値である.

命題 2.25 (Proposition 2.39 of [7]). 粗空間 $(X, \mathcal{E})$ の Higson コンパクト化 hX は最大の粗コンパクト化であり, また, hX より小さなコンパクト化はすべて粗コンパクト化である.

Proof. まず hX が粗コンパクト化であること, すなわち $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}_{hX}$ を示そう. 任意に $E \in \mathcal{E}$ を取り, E が定義 2.21(b) を満たすことを確かめよう. E が固有であることは既に分かっている (事実 2.18). また, E は対称かつ Δ_X を含むと仮定しても一般性を失わない. $(x_\lambda, y_\lambda) \in E$ および $x_\lambda \longrightarrow \omega \in \nu X$ とする. $y_\lambda \longrightarrow \omega$ を示すには, いま我々は $hX \subset \mathbb{R}^{C_h(X)}$ と考えているので任意の $f \in C_h(X)$ について $y_{\lambda f} \longrightarrow \omega_f$, すなわち $f(y_\lambda) \longrightarrow \omega_f$ を示せばよい. f は Higson 関数であるから $\varepsilon > 0$ を固定すると, $x \in X \setminus K$ ならば $\mathrm{diam}(f(E[x])) < \varepsilon$ となるコンパクト集合 K が存在する. $x_\lambda \longrightarrow \omega$ ゆえ十分大きな λ について $x_\lambda \notin K$ であり, $x_\lambda, y_\lambda \in E[x_\lambda]$ と合わせて $|f(x_\lambda) - f(y_\lambda)| < \varepsilon$ を得る. ゆえに $|f(x_\lambda) - f(y_\lambda)| \longrightarrow 0$. 更に $f(x_\lambda) \longrightarrow \omega_f$ であることから $f(y_\lambda) \longrightarrow \omega_f$ が示される.

次に hX の最大性を示そう. $\widetilde{X}$ を粗コンパクト化とし, $\partial X := \widetilde{X} \setminus X$ とする. 任意の $\widetilde{f} \in C^*(\widetilde{X})$ に対して $f := \widetilde{f}|_X$ が $\mathcal{E}$-Higson であることを示せば, $S(\widetilde{X}) \subset C_h(X) = S(hX)$ より, 定理 1.11 から $\widetilde{X} \leq hX$ を得る. 任意に $E \in \mathcal{E}$ および $\varepsilon > 0$ を取って固定しよう. $\mathbf{d}\widetilde{f} : \widetilde{X} \times \widetilde{X} \to \mathbb{R}$ において, $\mathbf{d}\widetilde{f}(\Delta_{\partial X}) = \{0\}$ より, $\mathbf{d}\widetilde{f}(W) \subset (-\varepsilon, \varepsilon)$ を満たす $\Delta_{\partial X}$ の開近傍 $W \subset \widetilde{X} \times \widetilde{X}$ が存在する. $\widetilde{X}$ は粗コンパクト化であるから, $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}_{\widetilde{X}}$ である. つまり, $E \in \mathcal{E}_{\widetilde{X}}$ において定義 2.21 の条件 (a) により $(\mathrm{cl}_{\widetilde{X} \times \widetilde{X}} E) \setminus X \times X \subset \Delta_{\partial X}$ が成り立ち, $K := \mathrm{cl}_{\widetilde{X} \times \widetilde{X}} E \setminus W$ は X^2 に含まれるコンパクト集合となる. 任意の $(x, y) \in E \setminus K$ について $(x, y) \in W$ ゆえ $|\mathbf{d}\widetilde{f}(x, y)| < \varepsilon$. つまり $\mathbf{d}\widetilde{f}|_E \in C_0^{\mathcal{E}}(E)$. 事実 2.6 により f は Higson 関数である.

Higson コンパクト化より小さい任意のコンパクト化が粗コンパクト化であることは, 命題 2.24 から直ちに得られる. □

例 2.26. Gromov 双曲空間における Gromov コンパクト化は粗コンパクト化である (Corollary 2.2 of [6]).

2.5 位相的粗構造と Higson コンパクト化

与えられた粗構造 $\mathcal{E}$ に対して, 位相的粗構造が $\mathcal{E}$ に一致するようなコンパクト化を探してみたくなるのが人情というものである. Higson コンパクト化が, この問題に部分的な解答を与えていることを本項では考察する. 相対コンパクト性と有界性が同値になる X の粗構造全体を $\mathcal{E}(X)$ とする. 写像 $h : \mathcal{E}(X) \to \mathcal{K}(X)$ $(h(\mathcal{E}) := h_{\mathcal{E}}X)$ および $t : \mathcal{K}(X) \to \mathcal{E}(X)$ $(t(\widetilde{X}) := \mathcal{E}_{\widetilde{X}})$ の間の関係について考えよう. 次の備考で見るように, 残念ながら h や t は単射ではない.

備考 2.27. 例 2.10, 2.11 にあるように, 離散空間 $\mathbb{N}$ について, 密着粗構造および普遍有界幾何構造の Higson コンパクト化は 1 点コンパクト化 αX に等しい. ゆえに h は単射でない. また, $\omega \neq \omega' \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ において, ω と ω' を同一視した $\beta\mathbb{N}$ の商空間を $\widetilde{\mathbb{N}}$ とすれば, これは $\mathbb{N}$ のコンパクト化であり, $\mathcal{E}_{\widetilde{\mathbb{N}}}$ は離散粗構造に一致する (Example 2.34 of [7]). $\mathcal{E}_{\beta\mathbb{N}}$ も離散粗構造に一致するため (例 2.22), t も単射でない.

一方, 次の命題により $h \circ t \circ h = h$, $t \circ h \circ t = t$ であり, 位相的粗構造全体 $t(\mathcal{K}(X))$ と Higson コンパクト化全体 $h(\mathcal{E}(X))$ との間に h, t を制限すると, $h|_{t(\mathcal{K}(X))}$ および $t|_{h(\mathcal{E}(X))}$ は全単射かつ ${h|_{t(\mathcal{K}(X))}}^{-1} = t|_{h(\mathcal{E}(X))}$ となる.

命題 2.28 (Proposition 2.45 of [7]). X の粗構造 $\mathcal{E}$ およびコンパクト化 $\widetilde{X}$ について次が成り立つ.

(a) $\mathcal{E} \subset t \circ h(\mathcal{E}) = \mathcal{E}_{h_{\mathcal{E}}X}$.

Proof. Higson コンパクト化は粗コンパクトであるという主張 (命題 2.25) そのものである. □

(b) $\widetilde{X} \leq h \circ t(\widetilde{X}) = h_{\mathcal{E}_X}X$.

Proof. $\widetilde{X}$ および $h_{\mathcal{E}_X}X$ は粗空間 $(X, \mathcal{E}_{\widetilde{X}})$ の粗コンパクト化である. Higson コンパクト化は最大の粗コンパクト化であったから, $\widetilde{X} \leq h_{\mathcal{E}_X}X$ である. □

(c) $h_{\mathcal{E}}X = h \circ t(h_{\mathcal{E}}X)$,

Proof. $\widetilde{X} := h_{\mathcal{E}}X$ として (b) を適用すれば $h_{\mathcal{E}}X \leq h \circ t(h_{\mathcal{E}}X)$. また, (a) の両辺に h を施すと命題 2.19 により順序が逆になり $h_{\mathcal{E}}X \geq h \circ t(h_{\mathcal{E}}X)$. □

(d) $\mathcal{E}_{\widetilde{X}} = t \circ h(\mathcal{E}_{\widetilde{X}})$.

Proof. $\mathcal{E} := \mathcal{E}_{\widetilde{X}}$ として (a) を適用すると $\mathcal{E}_{\widetilde{X}} \subset t \circ h(\mathcal{E}_{\widetilde{X}})$. また, (b) の両辺に t を施すと命題 2.24 により順序が逆になり $\mathcal{E}_{\widetilde{X}} \supset t \circ h(\mathcal{E}_{\widetilde{X}})$. □

備考 2.29 (Remark 2.46 of [7]). 上の結果と備考 2.27 を組み合わせることで, 普遍有界幾何構造は位相的粗構造にはなり得ない事が分かる. また, $\beta\mathbb{N}$ の境界上の 2 点を同一視したコンパクト化は, Higson コンパクト化にはなり得ない.

次の命題により, 第1可算公理を満たす X の任意のコンパクト化は Higson コンパクト化になり得る. とくに, 第2可算公理を満たすコンパクト化 (つまり距離付け可能なコンパクト化) は Higson コンパクト化になり得る.

命題 2.30 (Proposition 2.48 of [7]). 第1可算公理を満たす X のコンパクト化 $\widetilde{X}$ の位相的粗構造について, $hX \sim \widetilde{X}$.

Proof. 命題 2.28(b) より $\widetilde{X} \leq hX$ である. 逆向きの不等式を示すにあたり写像の拡張性を愚直に論じるのも良いが, ここでは次節で述べる命題 3.3 を用いよう.[27] 恒等写像 $\mathrm{id} : (X, \mathcal{E}_{\widetilde{X}}) \to (X, \mathcal{E}_{hX})$ は連続な粗写像であり $\widetilde{X}$ は第1可算公理を満たすので, 命題 3.3 により連続な拡張 $q : \widetilde{X} \to hX$ を持つ. これは $hX \leq \widetilde{X}$ を意味する. □

練習 2.31 (Exercise 2.49 of [7]). 固有距離空間 (X, d) の有界粗構造における Higson コンパクト化は第1可算公理を満たすことはない.

Proof. ここでは, 次項で証明することになる予告 1.36 を用いて証明しよう. もし $\omega \in \nu X$ が可算近傍基を持つとすれば, ω に収束する点列 $x_n \in X$ $(n \in \mathbb{N})$ が存在する. X は固有距離空間であるから集合 $A := \{ x_n \mid n \in \mathbb{N} \}$ は有界ではなく, したがって部分列を取り直すことで次を満たすとしてよい:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad d(x_n, \{ x_i \mid i = 1, \cdots, n-1 \}) > n.$$

このとき, 離散距離空間 $(A, d|_A)$ を定義域とする任意の有界関数 $f : A \to \mathbb{R}$ は Higson 条件を満たす. したがって $C_h(A, \mathcal{E}_{d|_A}) = C^*(A)$ である. ゆえに定理 1.11 より $hA \sim \beta A \approx \beta\mathbb{N}$. 予告 1.36 によれば $\mathrm{cl}_{hX} A \sim hA$ であり, $\mathrm{cl}_{hX} A \approx \beta\mathbb{N}$ の境界上の点は事実 1.16 から可算近傍基を持たない. これは $\omega \in \mathrm{cl}_{hX} A$ が可算近傍基を持つことに矛盾する. □

したがって, 有界粗構造における Higson コンパクト化について命題 2.30 を適用することは出来ない. しかしながら, 次のような肯定的な結果を得ることができる:

命題 2.32 (Proposition 2.46 of [7]). 固有距離空間 (X, d) の有界粗構造 $\mathcal{E}_d$ は, その Higson コンパクト化 hX による位相的粗構造 $\mathcal{E}_{hX}$ に一致する.

Proof. $\mathcal{E}_d \subset \mathcal{E}_{hX}$ は命題 2.28(a) による. 逆の包含関係を示すために $E \in \mathcal{E}_{hX}$ を任意に取り, $E \in \mathcal{E}_d$ を背理法で示そう. 議論を簡単にするために, ここでは次項で証明する予告 1.35 を用いる. もし $E \notin \mathcal{E}_d$ であると仮定すれば,

$$\forall\, M > 0,\ \exists\, (x_n, y_n) \in E \ \text{ s.t. } \ d(x_n, y_n) > M.$$

そこで, $(x_n, y_n) \in E$ を $d(x_n, y_n) > n$ を満たすように取ろう. 距離がいくらでも離れることから, $A := \{ x_n \mid n \in \mathbb{N} \}$ および $B := \{ y_n \mid n \in \mathbb{N} \}$ の少なくともいずれか一方は有界ではない. もし A が有界でないとすれば, $A \subset E[B]$ ゆえ B も有界ではない. 同様に B が有界でない場合も A は有界でなく, ゆえに A および B は共に有界でない. したがって, 部分列を取りなおすことで, 次が成立していると仮定してもよい:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad d(\{ x_n, y_n \}, \{ x_i, y_i \mid i = 1, \cdots, n-1 \}) > n.$$

[27] 実際, 写像の拡張性を論じようとすれば, 命題 3.3 の証明と同様の議論を行うことになる.

このとき, $Y = A \cup B$ とすれば, Y を定義域とする任意の有界関数 $f : Y \to \mathbb{R}$ は Higson 条件を満たす．とくに $f(A) = \{0\}$, $f(B) = \{1\}$ となる関数 $f : Y \to \{0,1\}$ は Higson 関数である．したがって, 予告 1.35 により Higson 関数となる連続な f の拡張 $F : X \to [0,1]$ が存在し,[28] 更に F は $\widetilde{F} : hX \to [0,1]$ に拡張する．さて, A は有界でないから, ある $\omega \in \nu X$ に収束する A 上の有向点列 x_{n_λ} が存在し, このとき $E \in \mathcal{E}_{hX}$ ゆえ, 定義 2.21(b) から y_{n_λ} も ω に収束する．したがって次の矛盾を得る:

$$\omega \in \mathrm{cl}_{hX} A \cap \mathrm{cl}_{hX} B \subset \widetilde{F}^{-1}(0) \cap \widetilde{F}^{-1}(1) = \emptyset.$$

□

上と同様の事実が C_0 粗構造についても成立する．距離 d が固有でない場合については, 考える時間がなかった (参照 [4]).

練習 2.33 (Exercise 2.50 of [7]). 固有距離空間 (X,d) の C_0 粗構造 $\mathcal{E}_d^0$ は, その Higson コンパクト化 hX による位相的粗構造 $\mathcal{E}_{hX}$ に一致する．

Proof. $\mathcal{E}_d^0 \subset \mathcal{E}_{hX}$ は命題 2.28(a) による．逆の包含関係を示すために $E \in \mathcal{E}_{hX}$ を任意に取り, $E \in \mathcal{E}_d^0$ を背理法で示そう．もし $E \notin \mathcal{E}_d^0$ であると仮定すれば, 次を満たす $\varepsilon > 0$ が存在する:

$$\forall\, K \subset X : \text{コンパクト集合}, \quad \exists\, (x_K, y_K) \in E \setminus K^2 \text{ s.t. } d(x_K, y_K) > \varepsilon.$$

したがって, 次を満たすように帰納的に点列 $(x_n, y_n) \in E$ を取ることができる:

- $d(x_n, y_n) > \varepsilon$,
- $d(x_n, \{\, x_i, y_i \mid i = 1, \cdots, n-1 \,\}) > n$ または $d(y_n, \{\, x_i, y_i \mid i = 1, \cdots, n-1 \,\}) > n$.

このとき, $A := \{\, x_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ および $B := \{\, y_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ の少なくともいずれか一方は有界ではない．もし A が有界でないとすれば, $A \subset E[B]$ ゆえ B も有界ではない．同様に B が有界でない場合も A は有界でなく, ゆえに A および B は共に有界でない．したがって, 部分列を取りなおすことで, 次が成立していると仮定してもよい:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad d(\{\, x_n, y_n \,\}, \{\, x_i, y_i \mid i = 1, \cdots, n-1 \,\}) > \varepsilon.$$

このとき $d(A,B) > \varepsilon$ である．ゆえに $f(A) = \{0\}$, $f(B) = \{1\}$ を満たす一様連続写像 $f \in C_u(X) = C_h(X)$ が存在する.[29] f の hX への拡張を $\widetilde{f}$ としよう．さて, A は離散部分集合であるから有界ではない．そこで, hX において収束する x_n の部分有向点列 $x_{n_\lambda} \longrightarrow \omega \in \nu X$ を取れば, $E \in \mathcal{E}_{hX}$ より $y_{n_\lambda} \longrightarrow \omega$ であり, ゆえに $\omega \in \mathrm{cl}_{hX} A \cap \mathrm{cl}_{hX} B \subset \widetilde{f}^{-1}(0) \cap \widetilde{f}^{-1}(1) = \emptyset$. これは矛盾である． □

[28] 距離によって定義できる A と B を分離する自然な連続写像が実際に Higson 条件を満たすことを示してもよい.
[29] 有界閉区間が一様 AE であることから直ちに得られる．あるいは, 距離によって定義される A と B を分離する自然な連続写像を考えよ.

2.6 Higson コンパクト化の特徴づけ

この項では, 1.3 および 1.4 項で述べたことを, Higson コンパクト化について考察する. これらに関する記述は Roe [7] にはなく, 例えば, 有界粗構造については [1] を参照せよ.

定義 2.34. 粗空間 $(X, \mathcal{E})$ の部分集合 A, B が次を満たすとき, **発散する** (**diverge**) または**漸近的に交わらない** (**asymptotically disjoint**) という:

$$\forall\, E \in \mathcal{E}, \quad E[A] \cap E[B] \text{ は有界.}$$

例 2.35. 距離空間 X の有界粗構造において $A, B \subset X$ が発散することは, 任意の $M > 0$ について $B(A, M) \cap B(B, M)$ が有界になることと同値である.

補題 2.36. 粗空間 $(X, \mathcal{E})$ の部分集合 A, B について, $\mathrm{cl}_{hX} A \cap \mathrm{cl}_{hX} B \cap \nu X = \emptyset$ ならば A と B は発散する.

Proof. A と B が発散することを背理法により示そう. もし $E[A] \cap E[B]$ が有界 (すなわち相対コンパクト) でないような制御集合 $E \in \mathcal{E}$ が存在するとすれば, ある $\omega \in \nu X$ に収束する有向点列 $z_\lambda \in E[A] \cap E[B]$ が見つかる. $(x_\lambda, z_\lambda), (y_\lambda, z_\lambda) \in E$ となる $x_\lambda \in A$, $y_\lambda \in B$ を取れば, 命題 2.28(a) より $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}_{hX}$ であるから, 定義 2.21(b) より $x_\lambda, y_\lambda \longrightarrow \omega$. したがって $\omega \in \mathrm{cl}_{hX} A \cap \mathrm{cl}_{hX} B \cap \nu X \neq \emptyset$ となり, 矛盾を得る. □

粗空間 $(X, \mathcal{E})$ の部分集合 A において, $\mathcal{E}$ の A への制限 $\mathcal{E}|_A := \{\, E \in \mathcal{E} \mid E \subset A^2 \,\}$ は A 上の粗構造をなす. $(A, \mathcal{E}|_A)$ を X の**部分粗空間**と呼ぶ.

事実 2.37. 粗空間 $(X, \mathcal{E})$ の部分集合 A および $\mathcal{E}$-Higson 関数 $f : X \to \mathbb{R}$ について, $f|_A$ は $\mathcal{E}|_A$-Higson である. □

いま我々は, 相対コンパクト性と有界性が同値になる粗空間 $(X, \mathcal{E})$ を考えている. 部分粗空間 $A \subset X$ もそのような状況を満たすためには, A は閉集合でなければならない:

事実 2.38. 粗空間 $(X, \mathcal{E})$ の部分集合 A について, $(A, \mathcal{E}|_A)$ において相対コンパクト性と有界性が同値となるための必要十分条件は, A が X の閉集合となることである. □

補題 2.39. 粗空間 $(X, \mathcal{E})$ の任意の集合 $A \subset X$ について, $\mathrm{cl}_{hX} A \leq h_{\mathcal{E}|_A} A$.

Proof. 定理 1.11 により, 対応する連続関数環に関する包含関係を示せば良い. 任意の $\widetilde{f} \in C^*(\mathrm{cl}_{hX} A)$ について, $\widetilde{f}|_A$ が $\mathcal{E}|_A$-Higson であることを示そう. ティーチェの拡張定理より $\widetilde{f}$ は $\widetilde{F} : hX \to \mathbb{R}$ に拡張する. 命題 1.13 より $F := \widetilde{F}|_X$ は $\mathcal{E}$-Higson であり, その制限 $F|_A = \widetilde{f}|_A$ は $\mathcal{E}|_A$-Higson である. □

定理 2.40. 粗空間 $(X, \mathcal{E})$ について次は同値である.

(i) 任意の閉集合 $A \subset X$ および $\mathcal{E}|_A$-Higson $f : A \to [a, b]$ について, $F|_A = f$ を満たす $\mathcal{E}$-Higson $F : X \to [a, b]$ が存在する. すなわち, 任意の閉集合からの Higson 関数は全体の Higson 関数に拡張する.

(ii) 任意の閉集合 $A \subset X$ について, $\mathrm{cl}_{hX} A \sim h_{\mathcal{E}|_A} A$.

(iii) 互いに交わらない任意の閉集合 $A, B \subset X$ について, A と B が発散するならば $\mathrm{cl}_{hX} A \cap \mathrm{cl}_{hX} B = \emptyset$.

Proof. (i)⇒(ii): 補題 2.39 により $\mathrm{cl}_{hX} A \leq h_{\mathcal{E}|_A} A$ は既に示した. 定理 1.11 を用いて $h_{\mathcal{E}|_A} A \leq \mathrm{cl}_{hX} A$ を示すために, 任意の $\mathcal{E}|_A$-Higson $f : A \to \mathbb{R}$ が $\mathrm{cl}_{hX} A$ に拡張することを言おう. f を $\mathcal{E}|_A$-Higson とすれば (i) により X への拡張 $F \in C_h(X)$ を持つ. F は hX への拡張 $\widetilde{F}$ を持ち, その制限 $\widetilde{F}|_{\mathrm{cl}_{hX} A}$ が求める拡張である.

(ii)⇒(i): $f : A \to [a, b]$ を $\mathcal{E}|_A$-Higson としよう. f は $\mathrm{cl}_{hX} A \sim h_{\mathcal{E}|_A} A$ 上への拡張 $\widetilde{f}$ を持つ. ティーチェの拡張定理により, $\widetilde{f}$ は hX 上への拡張 $\widetilde{F}$ を持ち, その制限 $\widetilde{F}|_X$ は $\mathcal{E}$-Higson なる f の拡張である.

(i)⇒(iii): A と B が発散すると仮定する. $Y = A \cup B$, $f : Y \to [0, 1]$ を $f(A) = \{0\}$, $f(B) = \{1\}$ と定める. f が $\mathcal{E}|_Y$-Higson であることを確認しよう. 任意の対称な $E \in \mathcal{E}|_Y$ に対して, $K = E[A] \cap E[B]$ は有界であるから, $x \in Y \setminus K$ ならば $E[x] \subset A$ または $E[x] \subset B$ である. 実際, $E[x] \cap A \neq \emptyset$ かつ $E[x] \cap B \neq \emptyset$ とすれば, $(a, x), (b, x) \in E$ を満たす $a \in A$, $b \in B$ が存在し, E の対称性から $x \in E[A] \cap E[B] = K$ となり $x \notin K$ に反する. ゆえに $E[x]$ は, A または B の少なくともいずれか一方に含まれてなければならない. よって, $\operatorname{diam} f(E[x]) = 0$ ゆえ f は $\mathcal{E}|_Y$-Higson となる. したがって, (i) より f は $\mathcal{E}$-Higson となる拡張 $F : X \to [0, 1]$ を持ち, 更に F は $\widetilde{F} : hX \to [0, 1]$ へ拡張する. このとき, $\mathrm{cl}_{hX} A \subset \widetilde{F}^{-1}(0)$ および $\mathrm{cl}_{hX} B \subset \widetilde{F}^{-1}(1)$ より $\mathrm{cl}_{hX} A \cap \mathrm{cl}_{hX} B \subset \widetilde{F}^{-1}(0) \cap \widetilde{F}^{-1}(1) = \emptyset$.

(iii)⇒(ii): 補題 2.39 により $\mathrm{cl}_{hX} A \leq h_{\mathcal{E}|_A} A$ は既に示した. 命題 1.26 を用いて $h_{\mathcal{E}|_A} A \leq \mathrm{cl}_{hX} A$ を示そう. $h_{\mathcal{E}|_A} A$ の互いに交わらない閉集合 $\widetilde{C}, \widetilde{D}$ を任意に取る. $C := \widetilde{C} \cap A$ および $D := \widetilde{D} \cap A$ は補題 2.36 により部分粗空間 $(A, \mathcal{E}|_A)$ において発散する. まず, C と D が $(X, \mathcal{E})$ においても発散することを背理法で示そう. もし $E[C] \cap E[D]$ が有界とならないような対称かつ Δ_X を含む $E \in \mathcal{E}$ があると仮定すれば, ある $\omega \in \nu X$ に収束する有向点列 $x_\lambda \in E[C] \cap E[D]$ が存在する. 各 λ について $(x_\lambda, c_\lambda), (x_\lambda, d_\lambda) \in E$ を満たす $c_\lambda \in C$ および $d_\lambda \in D$ を取れば, $(c_\lambda, d_\lambda) \in E \circ E$ である. $E \circ E$ は対称かつ Δ_X を含むことから $c_\lambda, d_\lambda \in (E \circ E[C]) \cap (E \circ E[D])$ となり, $E' := (E \circ E) \cap A^2 \in \mathcal{E}|_A$ についても $c_\lambda, d_\lambda \in E'[C] \cap E'[D]$ が成り立つ. 命題 2.28(a) より $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}_{hX}$ であるから, $x_\lambda \longrightarrow \omega$ および定義 2.21(b) より $c_\lambda, d_\lambda \longrightarrow \omega$ となり, つまり $E'[C] \cap E'[D]$ は有界でない. これは $(A, \mathcal{E}|_A)$ において C と D が発散することに矛盾する. 以上より, C と D は $(X, \mathcal{E})$ においても発散する. したがって (iii) より $\mathrm{cl}_{hX} C \cap \mathrm{cl}_{hX} D = \emptyset$. ゆえに命題 1.26 より $h_{\mathcal{E}|_A} A \leq \mathrm{cl}_{hX} A$. □

系 2.41. 粗空間 $(X, \mathcal{E})$ が定理 2.40 の各条件を満たすならば, その閉部分粗空間も各条件を満たす. □

固有粗空間については次の条件も同値になる:

命題 2.42. 粗連結な固有粗空間 $(X, \mathcal{E})$ において, 定理 2.40 の各条件と次は同値である.

(iv) 任意の集合 $A, B \subset X$ について, A と B が発散するならば $\mathrm{cl}_{hX} A \cap \mathrm{cl}_{hX} B \cap \nu X = \emptyset$.

Proof. (iii)⇒(iv): まず $\mathrm{cl}_X A \cap \mathrm{cl}_X B$ が有界であることを示そう. $\mathcal{E}$ は固有であるから, Δ_X の近傍となる $E \in \mathcal{E}$ が存在する. このとき命題 2.5 より $\mathrm{cl}_X A \cap \mathrm{cl}_X B \subset E[A] \cap E[B]$ であり, A と B は発

散することから $E[A]\cap E[B]$ は有界である．したがって $\mathrm{cl}_X A\cap \mathrm{cl}_X B$ も有界である．$\mathrm{cl}_X A\cap \mathrm{cl}_X B$ を含む X における相対コンパクトな開集合 U を取り，$A' := (\mathrm{cl}_X A)\setminus U$, $B' := (\mathrm{cl}_X B)\setminus U$ とすれば,

$$\mathrm{cl}_{hX} A\cap \mathrm{cl}_{hX} B\cap \nu X = \mathrm{cl}_{hX} A'\cap \mathrm{cl}_{hX} B'\cap \nu X = \mathrm{cl}_{hX} A'\cap \mathrm{cl}_{hX} B'$$

である．A' と B' は互いに交わらない X の閉集合であり, 更に $A'\subset E[A]$ および $B'\subset E[B]$ ゆえ A' と B' は発散する．したがって (iii) より $\mathrm{cl}_{hX} A'\cap \mathrm{cl}_{hX} B'=\emptyset$ となり, それゆえ $\mathrm{cl}_{hX} A\cap \mathrm{cl}_{hX} B\cap \nu X=\emptyset$ を得る．

(iv)⇒(iii): 明らか. □

備考 2.43. 定理 2.40 の (iii) および命題 2.42 の (iv) は, 補題 2.36 により次のようにそれぞれ言い換えることができる:

(iii)′ 互いに交わらない任意の閉集合 $A, B \subset X$ について, A と B が発散することと $\mathrm{cl}_{hX} A\cap \mathrm{cl}_{hX} B=\emptyset$ となることは必要十分である.

(iv)′ 任意の集合 $A, B\subset X$ について, A と B が発散することと $\mathrm{cl}_{hX} A\cap \mathrm{cl}_{hX} B\cap \nu X=\emptyset$ となることは必要十分である.

上の備考と系 1.27 から Higson コンパクト化の特徴づけとして次を得る.

系 2.44. 定理 2.40 の各条件を満たす粗空間 X, および X のコンパクト化 $\widetilde{X}$ について次は同値である:
(i) $\widetilde{X}\sim hX$,
(ii) 互いに交わらない X の任意の閉集合 A, B について,

$$\mathrm{cl}_{\widetilde{X}} A\cap \mathrm{cl}_{\widetilde{X}} B=\emptyset \iff A \text{ と } B \text{ は発散する.}$$ □

定理 2.40 の各条件が任意の粗構造に対して成立するかどうか, 筆者には不明である．ここでは, いくつかの粗構造の例が条件を満たすことを確かめよう.

命題 2.45. 第 1 可算公理を満たすコンパクト化 $\widetilde{X}$ の位相的粗構造 $\mathcal{E}_{\widetilde{X}}$ において, 定理 2.40 の各条件が成立する.

Proof. 条件 (iii) の対偶を示そう．$A, B\subset X$ を交わらない閉集合とし, $\mathrm{cl}_{\widetilde{X}} A\cap \mathrm{cl}_{\widetilde{X}} B\neq\emptyset$ を仮定する．$\omega\in \mathrm{cl}_{\widetilde{X}} A\cap \mathrm{cl}_{\widetilde{X}} B$ とすれば, $\omega\in\partial X := \widetilde{X}\setminus X$ であり, ω に収束する点列 $a_n\in A$ および $b_n\in B$ が存在する．このとき $E := \{\,(a_n, b_n) \mid n\in\mathbb{N}\,\}\in\mathcal{E}_{\widetilde{X}}$ である．何故なら, 任意のコンパクト集合 K に対して, $E[K]$ は有限集合となるので E は固有である．また, a_n および b_n の集積点は ω 唯一つであることから, 定義 2.21(b) を満たすことが分かり $E\in\mathcal{E}_{\widetilde{X}}$ を得る．$E' := E\cup E^{-1}\cup\Delta_X\in\mathcal{E}_{\widetilde{X}}$ とすれば, 各 $n\in\mathbb{N}$ について $a_n\in E'[A]\cap E'[B]$ である．したがって $E'[A]\cap E'[B]$ は有界ではなく, とくに A と B は発散しない. □

上の命題の適用外の粗空間について個別に考えてみよう.

事実 2.46. 正規空間における離散粗構造, および普遍有界幾何構造, C_0 粗構造において定理 2.40 の各条件が成立する.

Proof. 離散粗構造の閉部分粗構造は, やはり離散粗構造である. これらの Higson コンパクト化とは Stone-Čech コンパクト化のことであり, 条件 (ii) の成立が命題 1.33 より得られる. 普遍有界幾何構造や C_0 粗構造についても同様の論法により条件 (ii) の成立が分かる. □

事実 2.47. 固有距離空間の有界粗構造において, 定理 2.40 の各条件が成立する.

Proof. 条件 (iii) が成り立つことを示そう. A と B を互いに交わらない発散する閉集合とする. A と B を分離する自然な写像が Higson 関数になることを示せば, 命題 1.28 より $\mathrm{cl}_{hX} A \cap \mathrm{cl}_{hX} B = \emptyset$ を得る.

$$\lambda(x) := \frac{d(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)} \qquad \text{とすれば, } \lambda(A) = \{0\},\ \lambda(B) = \{1\}.$$

A と B は発散するので, 任意の $R > 0$ について $B(A,R) \cap B(B,R)$ は有界となる. したがって, $F(x) := d(x,A) + d(y,B)$ とすれば $F(x) \longrightarrow \infty$ $(x \to \infty)$ である. 任意の $M > 0$ に対して, 条件 $d(x,y) < M$ の下で $x, y \in X$ を無限大に飛ばすと,

$$\begin{aligned}
|\lambda(x) - \lambda(y)| &= \left|\frac{d(x,A)}{F(x)} - \frac{d(y,A)}{F(y)}\right| = \left|\frac{d(x,A)}{F(x)} - \frac{d(y,A)}{F(x)} + \frac{d(y,A)}{F(x)} - \frac{d(y,A)}{F(y)}\right| \\
&\leq \left|\frac{d(x,A) - d(y,A)}{F(x)}\right| + \left|\frac{d(y,A)(F(y) - F(x))}{F(x)F(y)}\right| \\
&\leq \frac{d(x,y)}{F(x)} + \frac{d(y,A)}{F(y)}\left|\frac{F(y) - F(x)}{F(x)}\right| \\
&\leq \frac{d(x,y)}{F(x)} + \frac{2d(x,y)}{F(x)} \longrightarrow 0 \quad (d(x,y) < M,\ x, y \to \infty).
\end{aligned}$$

以上より λ は Higson 関数である. □

事実 2.47 の議論は, 予告 1.32 および 1.35, 1.36 に対する証明を与えたことを意味する.

3 Higson コロナの粗不変性

まずは, これまでと同様に相対コンパクト性と有界性が同値になる粗空間のみを扱い, 最後に, 一般の粗空間の Higson コロナの定義を述べる.

3.1 粗写像と粗同値

定義 3.1. 粗空間 X から Y への写像 $F:(X,\mathcal{E})\to(Y,\mathcal{E}')$ が次の条件 (i), (ii) を満たすとき**粗写像** (**coarse map**) という.

(i) $E\in\mathcal{E} \implies (F\times F)(E):=\{\,(F(x),F(x'))\mid(x,x')\in E\,\}\in\mathcal{E}'$,

(ii) $B\subset Y$: 有界 $\implies F^{-1}(B)$: 有界.

更に, 粗写像 $F:X\to Y$ が次の条件 (iii) を満たすとき, F は**粗同値** (**coarse equivalence**) であるといい, このとき X と Y は**粗同値** (**coarse equivalent**) であるという.

(iii) $\exists\, G:Y\to X$: 粗写像 s.t. $G\circ F$ および $F\circ G$ は id_X, id_Y とそれぞれ近い.

条件 (ii) は $x\longrightarrow\infty$ ならば $F(x)\longrightarrow\infty$ (より正確にいえば, $\forall\, B\subset Y$: 有界, $\exists\, K\subset X$: 有界 s.t. $x\in X\setminus K\Longrightarrow F(x)\in Y\setminus B$) ということと同値である. とくに F が連続写像である場合, (ii) は F が固有写像であることを意味する.[30]

備考 3.2. 有界粗構造による粗空間の間の写像 $F:(X,\mathcal{E}_{d_X})\to(Y,\mathcal{E}_{d_Y})$ について, 上の (i) は次の (i)$'$ あるいは (i)$''$ のように言い換えることができる:

(i)$'$ $\forall\, M>0, \exists\, L>0, \forall\, x\in X, \operatorname{diam}F(B(x,M))\le L$,

(i)$''$ $\exists\,\rho:[0,\infty)\to[0,\infty)$: 単調増加 s.t. $\forall\, x,x'\in X$, $d_Y(F(x),F(x'))\le\rho(d_X(x,x'))$.

粗写像の利点は連続性を仮定しないことにあるのだが, 当面の間は連続性を仮定し, 次の命題の Higson コンパクト化版について考えよう.

命題 3.3 (Proposition 2.33 of [7]). 局所コンパクト空間 X および Y のコンパクト化 $\widetilde{X}$, $\widetilde{Y}$ を考え, $\widetilde{X}$ は第 1 可算公理を満たすとする. このとき, (連続な) 固有写像 $F:(X,\mathcal{E}_{\widetilde{X}})\to(Y,\mathcal{E}_{\widetilde{Y}})$ が連続な拡張 $\widetilde{F}:\widetilde{X}\to\widetilde{Y}$ を持つための必要十分条件は, F が粗写像となることである.

Proof. まず必要性を示そう. $\widetilde{F}:\widetilde{X}\to\widetilde{Y}$ を F の連続な拡張とする. 仮定より F は固有写像であるから粗写像であるための条件 (ii) を満たす. したがって (i) が成り立つことを示せばよい. 任意の $E\in\mathcal{E}_{\widetilde{X}}$ に対して, $(F\times F)(E)$ が定義 2.21 の条件 (a) を満たすことを示したい.

$$\mathrm{cl}_{\widetilde{X}\times\widetilde{X}}(F\times F)(E)=\mathrm{cl}_{\widetilde{X}\times\widetilde{X}}(\widetilde{F}\times\widetilde{F})(E)=(\widetilde{F}\times\widetilde{F})(\mathrm{cl}_{\widetilde{X}\times\widetilde{X}}E)$$

[30] 一般に, コンパクト集合の逆像がコンパクトになる連続写像を**固有写像** (**proper map**) という. 相対コンパクト性と有界性が一致する粗空間の間の連続写像は, 固有写像であることと条件 (ii) を満たすことは同値である. このため, Roe [7] では条件 (ii) を満たす写像のことを固有写像と呼んでいる.

であることに注意する. 任意の $(y,y')\in(\widetilde{F}\times\widetilde{F})(\mathrm{cl}_{\widetilde{X}\times\widetilde{X}}E)\backslash Y^2$ に対して, $(\widetilde{F}(x),\widetilde{F}(x'))=(y,y')$ を満たす $(x,x')\in\mathrm{cl}_{\widetilde{X}\times\widetilde{X}}E$ を取れば, $(y,y')\notin Y^2$ より $(x,x')\notin X^2$ である. E は定義2.21の条件(a)を満たすので $(\mathrm{cl}_{\widetilde{X}\times\widetilde{X}}E)\backslash X^2\subset\Delta_{\partial X}$ ゆえ $x=x'$. したがって $y=y'$. 以上より $(\mathrm{cl}_{\widetilde{X}\times\widetilde{X}}(F\times F)(E))\backslash Y^2\subset\Delta_{\partial Y}$.

十分性を示すために, 命題1.25の拡張条件を $F:X\to\widetilde{Y}$ が満たすことを確認しよう. A,B を $\widetilde{Y}$ の交わらない閉集合であるとし, $\mathrm{cl}_{\widetilde{X}}F^{-1}(A)\cap\mathrm{cl}_{\widetilde{X}}F^{-1}(B)=\emptyset$ を背理法により示す. もし $\mathrm{cl}_{\widetilde{X}}F^{-1}(A)\cap\mathrm{cl}_{\widetilde{X}}F^{-1}(B)\neq\emptyset$ とすれば, $\widetilde{X}$ の第1可算性から $z\in\mathrm{cl}_{\widetilde{X}}F^{-1}(A)\cap\mathrm{cl}_{\widetilde{X}}F^{-1}(B)$ に収束する点列 $a_n\in F^{-1}(A)$, $b_n\in F^{-1}(B)$ が存在する. このとき $E:=\{\,(a_n,b_n)\mid n\in\mathbb{N}\,\}$ は定義2.21の条件(b)を満たすので $E\in\mathcal{E}_{\widetilde{X}}$ となる (詳しくは命題2.45の証明と同様の議論[31]による). F は粗写像ゆえ $E':=(F\times F)(E)\in\mathcal{E}_{\widetilde{Y}}$ である. $\widetilde{Y}$ のコンパクト性により, A 上の点列 $F(a_n)$ は収束する部分有向点列 $F(a_{n_\lambda})$ $(\lambda\in\Lambda)$ を持つ. $F(a_{n_\lambda})$ の収束先を w とすれば, $w\in\partial Y$ でなければならない. 何故なら, もし $w\in Y$ とすれば w のコンパクト近傍 $K\subset Y$ が取れる. このとき, 十分大きい $\lambda\in\Lambda$ について $F(a_{n_\lambda})\in K$ となる. F は固有写像ゆえ $F^{-1}(K)$ はコンパクトとなり, これは a_n の部分有向点列 a_{n_λ} が $z\in\partial X$ に収束することに反する. さて, $(F(a_{n_\lambda}),F(b_{n_\lambda}))\in E'$ および $F(a_{n_\lambda})\longrightarrow w\in\partial Y$ ゆえ $F(b_{n_\lambda})\longrightarrow w$ である. したがって $w\in A\cap B$ となり, これは $A\cap B=\emptyset$ に矛盾する. 以上より, $\mathrm{cl}_{\widetilde{X}}F^{-1}(A)\cap\mathrm{cl}_{\widetilde{X}}F^{-1}(B)=\emptyset$ であり, 命題1.25により F は $\widetilde{X}$ 上に拡張する. □

備考 3.4. 上の必要性の証明において, 第1可算性は用いていないことに注意せよ.

次の命題により, 一般の粗空間においても, 粗写像であることが Higson コンパクト化に拡張を持つための十分条件であることが分かる. その前に, まず補題を示そう.

補題 3.5. 連続な粗写像 $F:X\to Y$ および任意の $f\in C_h(Y)$ について $f\circ F\in C_h(X)$ である.

Proof. X の粗構造を $\mathcal{E}$, Y の粗構造を $\mathcal{E}'$ とする. 任意の $E\in\mathcal{E}$ および $\varepsilon>0$ に対して, $E':=(F\times F)(E)\in\mathcal{E}'$ より次を満たす有界集合 $B\subset Y$ が存在する: $y\in Y\setminus B$ ならば $\mathrm{diam}\,f(E'[y])<\varepsilon$. このとき, $F^{-1}(B)$ は有界であり, $x\in X\setminus F^{-1}(B)$ ならば $F(x)\in Y\setminus B$ である.

$$F(E[x])=\{\,F(x')\mid(x',x)\in E\,\}\subset\{\,y'\mid(y',F(x))\in E'\,\}=E'[F(x)]$$

より $\mathrm{diam}\,f\circ F(E[x])\leq\mathrm{diam}\,f(E'[F(x)])<\varepsilon$. ゆえに $f\circ F$ は $\mathcal{E}$-Higson である. □

命題 3.6. 粗空間 X および Y について, 連続な粗写像 $F:X\to Y$ は Higson コンパクト化への連続な拡張 $\widetilde{F}:hX\to hY$ を持ち, $\widetilde{F}(\nu X)\subset\nu Y$ となる.

Proof. 補題3.5および命題1.45より直ちに主張は得られるが, 関数解析に不慣れな者のために直接証明を試みよう. $F':\mathbb{R}^{C_h(X)}\to\mathbb{R}^{C_h(Y)}$ を任意の $z=(z_g)_{g\in C_h(X)}\in\mathbb{R}^{C_h(X)}$ に対して $F'(z):=(z_{f\circ F})_{f\in C_h(Y)}$ と定めれば, 補題3.5より $f\circ F\in C_h(X)$ であるからこれは well-defined である. また, F' が連続であることは, $\mathbb{R}^{C_h(Y)}$ の任意の座標 $f\in C_h(Y)$ について $\mathrm{pr}_f\circ F'=\mathrm{pr}_{f\circ F}$ が連続であることから分かる. いま我々は, $x\in X$ と $e_{C_h(X)}(x)\in\mathbb{R}^{C_h(X)}$ を, そして $y\in Y$ と $e_{C_h(Y)}(y)\in\mathbb{R}^{C_h(Y)}$ を同一視している. 任意の $x\in X$ について

$$F'(e_{C_h(X)}(x))=F'\left((g(x))_{g\in C_h(X)}\right)=(f\circ F(x))_{f\in C_h(Y)}=e_{C_h(Y)}(F(x))$$

[31] この議論が一般の有向点列ではできないため, 命題では第1可算性を要求している.

であり, これは F' が F の拡張であることを意味する. $F(X) \subset Y \subset hY$ より ${F'}^{-1}(hY)$ は X を含む閉集合であるから $hX \subset {F'}^{-1}(hY)$, つまり $F'(hX) \subset hY$ であり, 制限 $\widetilde{F} := F'|_{hX} : hX \to hY$ により求める拡張を得る. $\widetilde{F}(\nu X) \subset \nu Y$ となることは F の固有性 (粗写像の条件 (ii)) より分かる. □

多くの粗空間においては, 連続写像が粗写像であることは Higson コンパクト化に拡張するための必要条件にもなっている:

系 3.7. 粗空間 $(X, \mathcal{E})$ から位相的粗構造からなる粗空間 $(Y, \mathcal{E}_{\widetilde{Y}})$ への連続写像 $F : X \to Y$ において, F が粗写像であることは, $\widetilde{F}(\nu X) \subset \nu Y$ なる連続な拡張 $\widetilde{F} : hX \to hY$ を持つことの必要十分条件である.

Proof. 粗写像であれば拡張を持つことは既に示した. 逆を示すにあたり, まず F が固有写像になることを背理法を用いて証明しよう. F が固有でないとすれば, $F^{-1}(K)$ が有界にならないようなコンパクト集合 $K \subset Y$ が存在する. このとき $A := F^{-1}(K)$ とすれば $\mathrm{cl}_{hX} A \cap \nu X \neq \emptyset$ である. 一方, $\widetilde{F}(\mathrm{cl}_{hX} A) \subset \mathrm{cl}_{hY} F(A) \subset K$ であるから $\widetilde{F}(\mathrm{cl}_{hX} A) \cap \nu Y \subset K \cap \nu Y = \emptyset$. そこで $z \in \mathrm{cl}_{hX} A \cap \nu X$ を取れば $\widetilde{F}(z) \in \widetilde{F}(\mathrm{cl}_{hX} A) \cap \nu Y \neq \emptyset$ となり, 矛盾が生じる. 以上より F は固有写像である.

さて, 命題 3.3 の必要性においては第 1 可算公理を仮定しなくてもよかったので, $F : (X, \mathcal{E}_{hX}) \to (Y, \mathcal{E}_{hY})$ が粗写像であることが分かる. また, 命題 2.28 より $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}_{hX}$ および $\mathcal{E}_{\widetilde{Y}} = \mathcal{E}_{hY}$ であるから, $F : (X, \mathcal{E}) \to (Y, \mathcal{E}_{\widetilde{Y}})$ も粗写像となる. □

次の命題も関数解析の言葉で直ちに示される (命題 3.17). ここではその様子を Higson コンパクト化にじかに触れながら確認しよう.

命題 3.8. 連続な粗写像 $F, G : X \to Y$ が近ければ, その Higson コンパクト化への拡張 $\widetilde{F}$, $\widetilde{G}$ について $\widetilde{F}|_{\nu X} = \widetilde{G}|_{\nu X}$.

Proof. 任意の $z \in \nu X$ を固定する. $\widetilde{F}(z) = \widetilde{G}(z) \in \mathbb{R}^{C_h(Y)}$ を示すには, 各座標 $f \in C_h(Y)$ ごとに $\widetilde{F}(z)_f = \widetilde{G}(z)_f$ となることを示せば良い. 命題 3.6 の証明における $\widetilde{F}$ の定義より, $\widetilde{F}(z)_f = z_{f \circ F}$, 同様に $\widetilde{G}(z)_f = z_{f \circ G}$ であったので, 結局は $z_{f \circ F} = z_{f \circ G}$ を示せば良い.

さて, z に収束する有向点列 $x^\lambda \in X$ $(\lambda \in \Lambda)$ を一つ固定しよう. このとき, $f \circ F(x^\lambda) = {x^\lambda}_{f \circ F} \longrightarrow z_{f \circ F}$, 同様に $f \circ G(x^\lambda) \longrightarrow z_{f \circ G}$ である. F と G は近いゆえ $E = \{\, (F(x^\lambda), G(x^\lambda) \mid \lambda \in \Lambda \,\}$ は粗空間 Y の制御集合である. f は Higson 関数であるから事実 2.6 により, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して次を満たす有界集合 $B \subset Y$ が取れる:

$$(y, y') \in E \setminus B^2 \implies |f(y) - f(y')| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

F は粗写像であるから $K := F^{-1}(B)$ も有界である. λ が十分大きいとき, $|z_{f \circ F} - f \circ F(x^\lambda)| < \varepsilon/3$ および $|z_{f \circ G} - f \circ G(x^\lambda)| < \varepsilon/3$ となり, さらに $x^\lambda \notin K$ となる. このとき, $(F(x^\lambda), G(x^\lambda)) \in E \setminus B^2$ であり,

$$\begin{aligned} |z_{f \circ F} - z_{f \circ G}| &\leq |z_{f \circ F} - f \circ F(x^\lambda)| \\ &\qquad + |f \circ F(x^\lambda) - f \circ G(x^\lambda)| + |f \circ G(x^\lambda) - z_{f \circ G}| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

$\varepsilon > 0$ の任意性より $z_{f \circ F} = z_{f \circ G}$. □

系 3.9. $F : X \to Y$, $G : Y \to X$ を連続な粗写像とし $G \circ F$ および $F \circ G$ は id_X, id_Y とそれぞれ近いとすれば, $\nu X \approx \nu Y$.

Proof. F, G の拡張を $\widetilde{F}, \widetilde{G}$ とする. $G \circ F$ および id_X は X から X への粗写像であるから, 前命題により $\mathrm{id}_{\nu X} = \widetilde{G} \circ \widetilde{F}|_{\nu X}$. 同様にして $\mathrm{id}_{\nu Y} = \widetilde{F} \circ \widetilde{G}|_{\nu X}$ が示せ, $\widetilde{F} : \nu X \to \nu Y$ は同相写像である. □

Higson コロナの粗不変性を示すには, 連続性を仮定せずに粗写像を扱わなければならない. ここで, 固有距離空間の有界粗構造を考える場合は, 任意の関数が連続となるような空間, すなわち離散空間に話を帰着させることができる. 正数 $M > 0$ について距離空間 D が ***M*-離散** (***M*-discrete**) であるとは, 任意の $z \neq z' \in D$ について $d(z, z') \geq M$ となることをいう.

補題 3.10. 任意の距離空間 (X, d) および $M > 0$ に対して, 有界粗構造について X と粗同値な M-離散部分集合 $D \subset X$ が存在する. 更に, X が固有距離空間ならば $\nu_{\mathcal{E}_d} X = \nu_{\mathcal{E}_{d|_D}} D$.

Proof. X 上の M-離散集合全体は包含関係に関して順序集合となり, ツォルンの補題により極大元 D を持つ. D の極大性より $B(D, M) = X$ となり, ゆえに包含写像 $\mathrm{id} : D \hookrightarrow X$ は粗同値である. 実際, 各 $x \in X$ について $d(x, z) < M$ を満たす $z \in D$ を一つとり $g(x) := z$ とすれば, 対応 $g : X \to D$ も粗写像となり, $g \circ \mathrm{id}$ および $\mathrm{id} \circ g$ は, それぞれ恒等写像と近い.

D は X の閉部分集合であるから, 定理 2.40(ii) により $hD \sim \mathrm{cl}_{hX} D$ である. ゆえに $\nu D \subset \nu X$ としてよい. 逆向きの包含関係 $\nu X \subset \nu D$ を示そう. 任意の $\omega \in \nu X$ を取り, ω に収束する有向点列 $x^\lambda \in X$ $(\lambda \in \Lambda)$ を取る. $z^\lambda := g(x^\lambda) \in D$ として, z^λ が ω に収束することを示せば $\omega \in \nu D$ を得る. いま $hX \subset \mathbb{R}^{C_h(X)}$ と考えていたので, 各座標 $f \in C_h(X)$ について $|x_f^\lambda - z_f^\lambda| \longrightarrow 0$ が示せれば $z^\lambda \longrightarrow \omega$ となる. f は Higson 関数であるから $\lim_{\lambda \in \Lambda} \operatorname{diam} f(B(x_\lambda, M)) = 0$ である. これは $|x_f^\lambda - z_f^\lambda| \longrightarrow 0$ を意味している. □

定理 3.11. 固有距離空間 (X, d) および (Y, d') について, X と Y が粗同値ならば $\nu_{\mathcal{E}_d} X \approx \nu_{\mathcal{E}_{d'}} Y$.

Proof. 補題 3.10 を用いて X および Y とそれぞれ粗同値な離散空間 $D_X \subset X$, $D_Y \subset Y$ を取れば D_X と D_Y は粗同値である. したがって系 3.9 により $\nu X = \nu D_X \approx \nu D_Y = \nu Y$. □

3.2 一般化された Higson コロナ

最後に, Higson コロナの定義を一般の粗空間へ拡張しよう. 拡張するにあたり, これまでの議論における次の 2 つの欠点を解消しなければならない:

(I) 例 2.17 にあるように, 粗空間の意味で有界な閉集合をコンパクト化させるために付加した境界上の点は, 粗空間としての無限遠の性質を何ら反映していない. そこで, こうした不必要な境界の情報を削った空間としてコロナを定義したい.

(II) 粗写像の真髄は連続性を仮定しないことにある. 固有距離空間においては, 粗同値な離散空間を持ち出すことで粗写像の連続性を外せたものの, このような議論は一般の粗空間においては不可能である.

(I) を解決するためには, 位相空間としての無限遠ではなく, 粗空間としての無限遠を定義すればよい. つまり, 極限 "$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$" が局所コンパクト空間において定義される概念であったのに対し, 一般の粗空間上の極限 "$\mathrm{Lim}_{x\to\infty} f(x) = 0$" を次のように定義する:

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, B \subset X : \text{有界},\quad \text{s.t.}\ \ x \in X \setminus B\ \Rightarrow\ |f(x)| < \varepsilon.$$

2 つの極限概念 lim と Lim は, 相対コンパクト性と有界性が同値になる局所コンパクト粗空間においては一致し, そうでない空間 (例えば例 2.17 に挙げた空間) では一致しない点に注意しよう.

(II) を解決するためには連続でない関数までをも含めた関数空間を考えればよい. また, 定理 1.46 を用いるため, ここでは複素数値関数を考えることにする. 本稿では, 粗空間 X 上の複素数値有界連続関数全体を $\mathcal{C}^*(X)$, Higson 関数全体を $\mathcal{C}_h(X)$ と表していたのであった. これに対して, X の複素数値有界関数 (連続でなくてもよい) 全体を $\mathcal{B}(X)$ で表す. $\mathcal{B}(X)$ も一様ノルムに関して C^* 環の構造を持ち, $\mathcal{C}^*(X)$ を部分 C^* 環として含む. また,

$$\mathcal{B}_0(X) := \{\, f \in \mathcal{B}(X) \mid \mathrm{Lim}_{x\to\infty} f(x) = 0 \,\}$$

とする. 更に, Higson 条件を満たす有界関数全体を $\mathcal{B}_h(X)$ とすれば, これは $\mathcal{B}_0(X)$ を含む $\mathcal{B}(X)$ の部分 C^* 環である.[32]

補題 3.12 (Lemma 2.40(a) of [7]). 相対コンパクト性と有界性が同値な粗空間 X について,

$$\mathcal{C}_0(X) = \mathcal{C}_h(X) \cap \mathcal{B}_0(X).$$

Proof. "$\subset$" は明らかである. 逆に $f \in \mathcal{C}_h(X) \cap \mathcal{B}_0(X)$ とすれば, $f \in \mathcal{C}_h(X)$ より f は連続である. また, X の仮定により, 相対コンパクト性と有界性は同値であったから $f \in \mathcal{B}_0(X)$ は $f \in \mathcal{C}_0(X)$ を意味する. □

補題 3.13 (Lemma 2.40(b) of [7]). パラコンパクトな粗空間 X が Δ_X のある近傍を制御集合として持てば,

$$\mathcal{B}_h(X) = \mathcal{C}_h(X) + \mathcal{B}_0(X).$$

Proof. "$\supset$" は明らかである. "$\subset$" を示そう. Δ_X の近傍となる制御集合を E とする. 各 $x \in X$ に対して $U_x \times U_x \subset E$ を満たす x の近傍 U_x を取る. X の開被覆 $\mathcal{U} := \{\, U_x \mid x \in X \,\}$ に対して, パラコンパクト性から $\mathcal{U}$ の局所有限な細分 $\mathcal{V} := \{\, V_\gamma \mid \gamma \in \Gamma \,\}$ を取り, 各 $\gamma \in \Gamma$ に対して $V_\gamma \subset U_{x_\gamma}$ を満たす $x_\gamma \in X$ を決めておく. $\mathcal{V}$ に対する 1 の分割を φ_γ $(\gamma \in \Gamma)$ とする.

さて, 任意の $f \in \mathcal{B}_h(X)$ に対して, $g : X \to \mathbb{C}$ を次で定める:

$$g(x) := \sum_{\gamma\in\Gamma} \varphi_\gamma(x) f(x_\gamma).$$

次の不等式により, g の有界性を得る:

$$\forall\, x \in X,\quad |g(x)| \le \sum_{\gamma\in\Gamma} \varphi_\gamma(x)|f(x_\gamma)| \le \sum_{\gamma\in\Gamma} \varphi_\gamma(x)\|f\| = \|f\|.$$

次に g が連続であることを示そう. 任意の $x \in X$ に対して, $\mathcal{V}$ は局所有限であるから, x の開近傍 W で, $\{\, \gamma \in \Gamma \mid W \cap V_\lambda \neq \emptyset \,\}$ が有限集合になるようなものが取れる. このとき, $W \cap V_\lambda = \emptyset$ な

[32] $\mathcal{B}_0(X) \subset \mathcal{B}_h(X)$ は, 命題 2.14 とほとんど同じようにして示せる.

らば $\varphi_\lambda(W) = \{0\}$ であるから, W における g の定義は W の元によらない有限和となる. 連続関数の有限和は連続ゆえ $g|_W$ は連続である. x の任意性から, g 自身も連続である.

次に $f-g \in \mathcal{B}_0(X)$ を示すために $\varepsilon > 0$ を任意に取ろう. f は Higson 条件を満たすので, $x \in X \setminus B$ ならば $\operatorname{diam} f(E[x]) < \varepsilon$ となるような有界集合 $B \subset X$ が存在する. 各 $x \in X$ について $\varphi_\gamma(x) \neq 0$ ならば $(x_\gamma, x) \in U_{x_\gamma} \times V_\gamma \subset U_{x_\gamma} \times U_{x_\gamma} \subset E$ ゆえに $x, x_\gamma \in E[x]$ となることに注意すると, 任意の $x \in X \setminus B$ について

$$|f(x) - g(x)| = \left|\sum_{\gamma\in\Gamma} \varphi_\gamma(x)(f(x) - f(x_\gamma))\right| \leq \sum_{\gamma\in\Gamma} \varphi_\gamma(x)|f(x) - f(x_\gamma)| < \sum_{\gamma\in\Gamma} \varphi_\gamma(x) \cdot \varepsilon = \varepsilon.$$

したがって $f-g \in \mathcal{B}_0(X)$ である. $g = f - (f-g) \in \mathcal{B}_h(X) + \mathcal{B}_0(X) = \mathcal{B}_h(X)$ かつ g は連続ゆえ $g \in \mathcal{C}_h(X)$. 以上より, $f = g + (f-g) \in \mathcal{C}_h(X) + \mathcal{B}_0(X)$. □

事実 3.14 (第 2 同型定理). C^* 環 A の部分 C^* 環 B, C について, $C/(B\cap C) \simeq (B+C)/B$.

Proof. 本来は C^* 環として同型になることを証明しなければならないが, ここではアーベル群として同型になることのみ確認しよう. $D := B \cap C$ とおき, 写像 $\Phi : (B+C)/B \to C/D$ を $\Phi(b+c+B) := c + D$ $(b \in B,\ c \in C)$ と定めれば Φ は well-defined である. 実際, $(b+c) - (b'+c') \in B$ $(b' \in B,\ c' \in C)$ とすれば, $c - c' \in B - (b-b') = B$ であり, $c - c' \in C$ と合わせて $c - c' \in D$ を得る. Φ は明らかに準同型である. $C \subset B + C$ ゆえ Φ の全射性は明らかなので単射性を示そう. $\Phi(b+c+B) = \Phi(b'+c'+B)$ $(b, b' \in B,\ c, c' \in C)$ を仮定すれば, $c - c' \in D \subset B$ および $b - b' \in B$ ゆえ $(b+c)-(b'+c') = (b-b') + (c-c') \in B$ である. 以上より Φ は単射であり, したがって同型となる. □

命題 1.38 および補題 3.12, 3.13, 事実 3.14 から, 任意の粗連結な固有粗空間 X について次を得る:

$$\mathcal{C}^*(\nu X) \simeq \frac{\mathcal{C}_h(X)}{\mathcal{C}_0(X)} = \frac{\mathcal{C}_h(X)}{\mathcal{B}_0(X) \cap \mathcal{C}_h(X)} \simeq \frac{\mathcal{B}_0(X) + \mathcal{C}_h(X)}{\mathcal{B}_0(X)} = \frac{\mathcal{B}_h(X)}{\mathcal{B}_0(X)}.$$

これを踏まえて, 一般の粗空間に対する Higson コロナを次のように定義しよう:

定義 3.15. 粗空間 $(X, \mathcal{E})$ において, 定理 1.46 および系 1.43 により $\mathcal{B}_h(X)/\mathcal{B}_0(X) \simeq \mathcal{C}^*(\nu X)$ を満たすコンパクト空間 νX が同相を除いて一意に存在する. この νX を X の **Higson コロナ**という.

備考 3.16. 定義 2.20 と定義 3.15 は, 粗連結な固有粗空間については一致する. 一般の局所コンパクト空間の粗構造においても一致するかどうか筆者には不明である.

命題 3.17 (Proposition 2.41 of [7]). 粗空間 X および Y について, 粗写像 $F : X \to Y$ は Higson コロナ間の連続写像 $\widetilde{F} : \nu X \to \nu Y$ を誘導する. また, 粗写像 $F, G : X \to Y$ が近ければ, それらが誘導する Higson コロナ間の連続写像は一致する.

Proof. 補題 3.5 と同様の証明で, 任意の $f \in \mathcal{B}_h(Y)$ に対して $f \circ F \in \mathcal{B}_h(X)$ を得る. したがって, F は準同型 $\mathfrak{T}_F : \mathcal{B}_h(Y) \to \mathcal{B}_h(X)$ $(\mathfrak{T}_F(f) := f \circ F)$ を誘導する. $\mathfrak{T}_F(\mathcal{B}_0(Y)) \subset \mathcal{B}_0(X)$ より, $\mathfrak{T}_F$ は準同型 $\Phi^F : \mathcal{C}^*(\nu Y) \simeq \mathcal{B}_h(Y)/\mathcal{B}_0(Y) \to \mathcal{B}_h(X)/\mathcal{B}_0(X) \simeq \mathcal{C}^*(\nu X)$ を与える. 定理 1.39 によって得られる $\mathfrak{T}_{\widetilde{F}} = \Phi^F$ を満たす $\widetilde{F} : \nu X \to \nu Y$ が求める連続写像である.

主張の後半を示そう. 任意の $f \in \mathcal{B}_h(Y)$ について $\Phi^F(f) = \Phi^G(f)$, つまり $\mathfrak{T}_F(f) - \mathfrak{T}_G(f) = f \circ F - f \circ G \in \mathcal{B}_0(Y)$ をいえばよい. F と G は近いので $E := \{\, (F(x), G(x)) \mid x \in X \,\}$ は Y の制御集合である. 任意に $\varepsilon > 0$ を取ろう. f は Higson 条件を満たすので, $(y, y') \in E \setminus B^2$ ならば

$|f(y)-f(y')|<\varepsilon$ となるような有界集合 $B\subset Y$ が存在する．F は粗写像ゆえ $F^{-1}(B)$ は有界である．このとき, 任意の $x\in X\setminus F^{-1}(B)$ に対して, $F(x)\notin B$ であるから $(F(x),G(x))\in E\setminus B^2$ となり $|f(F(x))-f(G(x))|<\varepsilon$. ゆえに $f\circ F-f\circ G\in\mathcal{B}_0(Y)$. □

系 3.18 (Corollary 2.42 of [7]). 粗空間 X と Y が粗同値ならば $\nu X\approx\nu Y$.

Proof. 証明は系 3.9 の論法とほとんど同じである．$G\circ F$ および $F\circ G$ が id_X, id_Y とそれぞれ近くなるような粗写像 $F:X\to Y$, $G:Y\to X$ を取り, それらが誘導する Higson コロナ間の写像を $\widetilde{F}:\nu X\to\nu Y$, $\widetilde{G}:\nu Y\to\nu X$ とする．$G\circ F$ および id_X は共に X から X への粗写像であり, 前命題より $\mathrm{id}_{\nu X}=\widetilde{G\circ F}=\widetilde{G}\circ\widetilde{F}$. 同様にして $\mathrm{id}_{\nu Y}=\widetilde{F}\circ\widetilde{G}$ が分かり, $\widetilde{F}:\nu X\to\nu Y$ は同相写像である． □

備考 3.19. 離散空間 $\mathbb{N}$ における密着粗構造 $\mathcal{E}$ と普遍有界幾何構造 $\mathcal{E}'$ は粗同値ではない．実際, $(\mathbb{N},\mathcal{E})$ から $(\mathbb{N},\mathcal{E}')$ への任意の写像は粗写像でない．ところが, これら固有粗空間の Higson コンパクト化は共に 1 点コンパクト化であったから, とくに Higson コロナは同相であり, ゆえに系 3.18 の逆は成り立たない．Higson コロナがどの程度もとの粗空間の情報を反映しているかという問題は, 同じタイプの粗構造, あるいは位相的粗構造に限って考えるべきなのかもしれない．

一般の粗空間に対する Higson コロナを手作りで構成する方法はないだろうか．粗空間 X の各点が有界近傍をもつとすれば, 命題 2.15 より $C_h(X)\in\mathcal{A}(X)$ となる．つまり, X の Higson コンパクト化 $hX:=T(C_h(X))$ が定義される．そこで, hX における境界 $\partial X:=hX\setminus X$ の部分空間

$$\mu X:=hX\setminus U\subset\partial X,\qquad \text{ただし, }\ U:=\bigcup\{\,\mathrm{cl}_{hX}B\mid B\subset X:\ \text{有界}\,\}$$

を考えれば, μX は X の有界部分の情報を削った空間である．最後に, $\mu X\approx\nu X$ となることを確認して本稿を終えよう．

命題 3.20. Δ_X のある近傍を制御集合として持つ粗連結なパラコンパクト粗空間 X について,

$$\mu X\approx\nu X.$$

Proof. まず, μX がコンパクト空間であることを示すために, U が hX の開集合となることを示そう．任意の $z\in U$ に対して, $z\in\mathrm{cl}_{hX}B$ を満たす有界集合 B が存在する．このとき, 仮定より $\mathrm{cl}_X B$ の有界開近傍 B' が存在する.[33] そこで, ウリゾーンの補題を用いて $f(\mathrm{cl}_X B)=\{1\}$ かつ $f(X\setminus B')=\{0\}$ を満たす連続関数 $f:X\to[0,1]$ を取れば, $f\in\mathcal{B}_0(X)$ ゆえ f は Higson 関数であり, 連続な拡張 $\widetilde{f}:hX\to[0,1]$ を持ち, このとき $\widetilde{f}(z)=1$ となる．さて, hX の開集合 $\widetilde{f}^{-1}((0,1])$ において $\widetilde{f}^{-1}((0,1])\cap X=f^{-1}((0,1])$ は稠密であるから, $\widetilde{f}^{-1}((0,1])\subset\mathrm{cl}_{hX}f^{-1}((0,1])$. したがって,

$$z\in\widetilde{f}^{-1}((0,1])\subset\mathrm{cl}_{hX}f^{-1}((0,1])\subset\mathrm{cl}_{hX}B'\subset U.$$

ゆえに U は hX の開集合である．

命題 1.38 によれば $\mathcal{C}^*(\mu X)\simeq\mathcal{C}^*(hX)/\mathcal{C}_0(U)$ であった．また, $\mathcal{C}^*(\nu X)\simeq\mathcal{C}_h(X)/(\mathcal{B}_0(X)\cap\mathcal{C}_h(X))$ であったから, $\nu X\approx\mu X$ を示すために同型

$$\Phi:\mathcal{C}_h(X)/(\mathcal{B}_0(X)\cap\mathcal{C}_h(X))\to\mathcal{C}^*(hX)/\mathcal{C}_0(U)$$

[33] Δ_X の近傍 $E\subset X^2$ を制御集合とすれば, 有界集合 B について $\mathrm{cl}_X B\subset E[B]$ であり (命題 2.5), $E[B]$ は $\mathrm{cl}_X B$ の有界近傍となる．

を構成しよう．任意の $f \in \mathcal{C}_h(X)$ に対して, f は $\widetilde{f} \in \mathcal{C}^*(hX)$ に拡張する．そこで,

$$\Phi(f + \mathcal{B}_0(X) \cap \mathcal{C}_h(X)) := \widetilde{f} + \mathcal{C}_0(U)$$

と定義すれば, これは well-defined である．実際に $f - f' \in \mathcal{B}_0(X) \cap \mathcal{C}_h(X)$ $(f, f' \in \mathcal{C}_h(X))$ として, $\widetilde{f} - \widetilde{f}' \in \mathcal{C}_0(U)$ を確認してみよう．$\varepsilon > 0$ を任意に取れば, $f - f' \in \mathcal{B}_0(X)$ から次を得る:

$$\exists\, B \subset X : \text{有界}, \ \ \text{s.t.} \ \ x \in X \setminus B \ \Rightarrow \ |f(x) - f'(x)| < \varepsilon.$$

つまり, $z \in hX \setminus \mathrm{cl}_{hX} B$ とすれば, z は $X \setminus B$ の触点であるから $|\widetilde{f}(z) - \widetilde{f}'(z)| \leq \varepsilon$. ゆえに $\widetilde{f} - \widetilde{f}' \in \mathcal{C}_0(U)$. Φ の全射性は明らかなので, 単射性を示そう．$\ker \Phi = \{0\}$ $(= \mathcal{B}_0(X) \cap \mathcal{C}_h(X))$ をいえばよい．$f \in \mathcal{C}_h(X)$ の拡張 $\widetilde{f} : hX \to \mathbb{C}$ が $\widetilde{f} \in \mathcal{C}_0(U)$ を満たすとし, $\varepsilon > 0$ を任意に取ろう．このとき,

$$\exists\, K \subset U : \text{コンパクト}, \ \ \text{s.t.} \ \ x \in hX \setminus K \ \Rightarrow \ |\widetilde{f}(x)| < \varepsilon.$$

μX のコンパクト性の議論と同様の方法で, 各 $z \in K$ に対して, $\mathrm{cl}_{hX} B_z$ が hX における z の近傍となるように有界集合 $B_z \subset X$ が取れる．K のコンパクト性より有限個の $z_i \in K$ $(i = 1, \cdots, n)$ を用いて $K \subset \bigcup_{i=1}^n \mathrm{cl}_{hX} B_{z_i}$ とできるので, $K \cap X \subset \bigcup_{i=1}^n \mathrm{cl}_X B_{z_i}$. ゆえに $K \cap X$ は有界集合である. $x \in X \setminus (K \cap X)$ ならば $|f(x)| < \varepsilon$ となることは明らかであり, $f \in \mathcal{B}_0(X) \cap \mathcal{C}_h(X)$ を得る． □

参考文献

[1] A.N. Dranishnikov, J. Keesling, and V.V. Uspenskij, *On the Higson corona of uniformly contractible spaces*, Topology **37** (1998), no. 4, 791–803.

[2] R. Engelking, *General Topology*, Heldermann, Berlin, 1989.

[3] M. Katětov, *On real-valued functions in topological spaces*, Fund. Math. **38** (1951), 85–91.

[4] K. Mine and A. Yamashita, *C_0 coarse structures and Smirnov compactifications*, `arXiv:1106.1672v1`.

[5] J. Nagata, *Modern general topology*, second edition, North-Holland, Amsterdam, 1985.

[6] J. Roe, *Hyperbolic metric spaces and the exotic cohomology Novikov conjecture*, K-Theory **4** (1990/91), no. 6, 501–512.

[7] J. Roe, *Lectures on coarse geometry*, University Lecture Series, 31. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[8] R.G. Woods, *The minimum uniform compactification of a metric space*, Fund. Math. **147** (1995), 39–59.