

コンパクト化の近似定理

筑波大学数理物質科学研究科 嶺 幸太郎 (Kotaro Mine)

1 導入

\mathbb{R} を実数直線, I を単位閉区間 $[-1, 1]$ とする. 位相空間 X のハウスドルフ・コンパクト化全体を $\mathcal{K}(X)$ で表す. $\mathcal{K}(X)$ が空でない, すなわち X のハウスドルフ・コンパクト化が存在するための必要十分条件は X がチコノフ空間¹ となることであった. 以下, X はすべてチコノフ空間とし, コンパクト化とはハウスドルフ・コンパクト化を指すものとする.

さて, $\mathcal{K}(X)$ 上には, 次のような向き “ \leq ” および同値関係 “ \sim ” が定義できる.

定義 1.1. ふたつのコンパクト化 $\gamma X, \delta X \in \mathcal{K}(X)$ において $f|_X = \text{id}_X$ なる連続関数 $f: \delta X \rightarrow \gamma X$ が存在するとき $\gamma X \leq \delta X$ と書く. $\gamma X \leq \delta X$ かつ $\delta X \leq \gamma X$ が成立するとき $\gamma X \sim \delta X$ と関係 “ \sim ” を定義すれば, これは同値関係となる. 更に, $\mathcal{K}(X)/\sim$ 上にも “ \leq ” により自然に向きが定義され, $(\mathcal{K}(X)/\sim, \leq)$ は順序集合, とくに上半完備束² となる. 以下, 順序集合 $(\mathcal{K}(X)/\sim, \leq)$ を $\mathcal{K}(X)$ と略記する.

$\gamma X \sim \delta X$ ならば, 定義により γX と δX は同相 (\approx) となる. 逆は必ずしも成り立たないことに注意したい. $\mathcal{K}(X)$ が上半完備束であることは自明ではなく, 例えば後で述べる事実 3.1 から得られる.

$\mathcal{K}(X)$ の最大元 $\beta X = \sup \mathcal{K}(X)$ は Stone-Čech コンパクト化である. 更に X が局所コンパクト空間である場合 $\mathcal{K}(X)$ は完備束となり, その最小元 $\alpha X = \inf \mathcal{K}(X)$ は X の 1 点コンパクト化である. ある $\gamma X \in \mathcal{K}(X)$ がいくつかのコンパクト化たちの上限となっているとき, γX はそれらで近似できると呼ぶことにしよう. ただし, これはあくまでも言葉のあやであり, $\mathcal{K}(X)$ 上に位相が定義されているわけではないことに注意したい.

それでは, あるコンパクト化がより単純なコンパクト化で近似できるためには, どういった条件が必要なのであろうか. また, 近似に必要なコンパクト化の数はどれくらい少なくできるのか. これらの自然な問題に対する考察を本稿では与えたい.

¹ハウスドルフ空間 X がチコノフ空間であるとは, $f(F) = \{0\}$, $f(x) = 1$ なる連続関数 $f: X \rightarrow I$ の存在が X の任意の閉集合 F およびその外側の点 $x \in X \setminus F$ に対して言えることである.

²順序集合が上半完備束 (complete upper semilattice) であるとは, 任意の部分集合がその順序において上限を持つことである. 任意の部分集合が上限および下限を持つ場合は完備束 (complete lattice) であるという.

2 既に知られているいくつかの近似定理

まずは、いくつかの既存の結果を紹介しよう。多くの先行研究のすべてを紹介することはできないが、 βX に対する近似定理として例えば次が知られている。

定理 2.1 (Chandler-Faulkner [1], 1987). 局所コンパクト空間 X が無限遠で連結ならば βX は特異コンパクト化たちで近似できる。

ここで、局所コンパクト空間 X が無限遠で連結 (connected at infinity) であるとは、補集合が連結となるより大きいコンパクト部分集合が X のいかなるコンパクト部分集合に対しても存在することである。 $\gamma X \in \mathcal{K}(X)$ が特異コンパクト化 (singular compactification) であるとは、剰余 $\gamma X \setminus X$ が γX のレトラクトとなるようなコンパクト化のことである。³

定理 2.2 (Woods [5], 1995). 距離付け可能⁴な空間 X において、 βX は Smirnov コンパクト化で近似できる。

Smirnov コンパクト化については、 X 上の実数値連続関数環の部分環を用いて次節で定義したい。

上述の近似定理はいずれも Stone-Čech コンパクト化に対するものであるが、任意のコンパクト化に対する近似定理としては例えば次がある。

定理 2.3 (Faulkner [3], 1990). ユークリッド空間 \mathbb{R}^n ($n \geq 2$) の任意のコンパクト化は、剰余が閉区間 I または 1 点と同相なコンパクト化で近似できる。

事実 2.4. 距離付け可能かつ可分⁵な局所コンパクト空間 X の任意のコンパクト化は、距離付け可能なコンパクト化で近似できる。

今回は次の定理の証明の概略を紹介するとともに、この証明のアイデアが上述の定理群をどれだけ一般化できるか検討したい。

定理 2.5. \mathbb{R} の任意のコンパクト化は \mathbb{R}^2 に埋め込めるようなコンパクト化で近似できる。

3 連続関数環とコンパクト化

X の実数値有界連続関数全体を $C^*(X)$ で表す。 $C^*(X)$ に一様ノルムによる位相を入れれば自然な和と積の演算に関してバナッハ環となる。 $C^*(X)$ の単位的閉部分環で X の位相を生成するもの全体を $\mathcal{A}(X)$ とする。ここで、 $A \subset C^*(X)$ が X の位相を生成するとは、 A のすべての元が連続となる最弱位相が X の元の位相に一致することである。 X はチコノフ空間であるので、これは X の任意の閉集合とその外側の点を分離する関数が A の中に存在することと同値になる。

単位的可換 C^* 環とコンパクト・ハウスドルフ空間の間には一対一の対応があることが知られている。これを X のコンパクト化に限って見てみると次のことが分かる。

³正確にはこれは定義と同値な条件である。通常は、 X からコンパクト空間への特異な連続関数を用いて定義する。例えば Faulkner[2] を参照されたい。

⁴ある距離空間と同相な位相空間を距離付け可能な空間と言う。

⁵可算な稠密部分集合をもつ位相空間を可分であると言う。

事実 3.1. チコノフ空間 X に対して, $(\mathcal{K}(X), \leq)$ と $(\mathcal{A}(X), \subset)$ は順序同型である.

実際, 各 $\gamma X \in \mathcal{K}(X)$ に対して, γX に連続関数として拡張可能な X 上の有界関数全体を $S(\gamma X)$ とすれば (すなわち $S(\gamma X) = \{f|_X \in C^*(X) \mid f \in C^*(\gamma X)\}$), 対応 $S: \mathcal{K}(X) \rightarrow \mathcal{A}(X)$ は順序同型となる. ここで $S(\gamma X)$ と $C^*(\gamma X)$ はバナッハ環として同型 (\simeq) であることに注意したい. また, 各 $A \in \mathcal{A}(X)$ に対して, X からチコノフ立方体 \mathbf{I}^A への関数 $e_A: X \rightarrow \mathbf{I}^A$ を $e_A(x) = (f(x)/\|f\|)_{f \in A}$ と定義すれば e_A は埋蔵写像であり, \mathbf{I}^A における X のコンパクト化を $T(A) = \text{cl}_{\mathbf{I}^A} e_A(X)$ とすれば, 対応 $T: \mathcal{A}(X) \rightarrow \mathcal{K}(X)$ は順序を保つ S の逆写像となる. なお, $T(A)$ は A の極大イデアル空間に一致する.

以上の証明は初等的にできるが, $S \circ T = \text{id}_{\mathcal{A}(X)}$ を示すにあたり, Stone-Weierstrass の近似定理を用いる. また, 上の事実および今回の議論は複素数値有界連続関数に関してもほぼ同様に成り立つ. ただしその場合は閉部分環を部分 C^* 環に限る必要がある.

事実 3.1 を用いて, Smirnov コンパクト化が定義される.

定義 3.2. 距離付け可能な空間 X および X の許容可能⁶な距離 d に対して, (X, d) から \mathbb{R} への有界な一様連続関数全体を $U_d(X)$ とすれば $U_d(X) \in \mathcal{A}(X)$ である. (X, d) の Smirnov コンパクト化とは, $u_d X := T(U_d(X))$ で定義されるコンパクト化のことである. 本稿では, $\gamma X \in \mathcal{K}(X)$ が X のある許容可能な距離 d について (X, d) の Smirnov コンパクト化と同値であるとき, γX を Smirnov コンパクト化と呼ぶことにする.

$C^*(X)$ の部分集合 D に対して, D を含む最小の単位的閉部分環を $\langle D \rangle$ と書こう.⁷ 定理 2.5 を示すにあたり, まず次の補題を認めたい.

補題 3.3. 任意の $\gamma X \in \mathcal{K}(X)$ に対して $A = S(\gamma X)$ とする. このとき, 任意の $g \in C^*(X)$ に対して X のコンパクト化 $T(\langle A, g \rangle)$ は積空間 $\mathbf{I} \times \gamma X$ に埋め込める.

$T(\langle A, g \rangle)$ の定義には, 部分環 $\langle A, g \rangle$ の元の個数ぶんの座標を要するチコノフ立方体を用いている. しかしながら, $\langle A, g \rangle$ 上の全ての関数の情報が必要なわけではなく, A と関数 g のみで十分であることを補題 3.3 は意味している (実際, 補題 3.3 の証明はこれを示すことで得られる).

次の命題の証明は, 今回得られるすべての近似定理の鍵となる.

命題 3.4. $\gamma X \leq \delta X$ を満たす二つの任意のコンパクト化 γX および δX において, δX は $\mathbf{I} \times \gamma X$ に埋め込めるような X のコンパクト化たちで近似することができる.

証明. まず $\langle D \rangle = S(\delta X)$ を満たすような集合 $D \subset S(\delta X)$ を一つ選ぼう ($D = S(\delta X)$ でもよい). 更に $A = S(\gamma X)$ とおこう. $\gamma X \leq \delta X$ より $S(\gamma X) \subset S(\delta X)$, すなわち $A \subset \langle D \rangle$ である. T は順序同型であるから \sup 記号を外に出せることに注意して計算すると,

$$\begin{aligned} \delta X &= T(S(\delta X)) = T(\langle D \rangle) = T(\langle D \cup A \rangle) \\ &= T(\sup \{ \langle A, g \rangle \mid g \in D \setminus A \}) = \sup \{ T(\langle A, g \rangle) \mid g \in D \setminus A \}. \end{aligned}$$

⁶ X の位相と一致する位相を導入する X 上の距離のことを許容可能な距離と呼ぶ.

⁷ 閉集合に限っている点に注意. $\overline{\langle D \rangle}$ と書くべきかもしれないが, 本稿では閉部分環のみしか考えないのでこのように略記する.

補題 3.3 によれば各 $T(\langle A, g \rangle)$ は $\mathbf{I} \times \gamma X$ に埋め込めるようなコンパクト化であった。ゆえに命題は示された。□

命題 3.4 により, ただちに定理 2.5 が得られる。

定理 2.5 の証明. \mathbb{R} の任意のコンパクト化 $\delta\mathbb{R}$ に対して, $\gamma\mathbb{R} = \alpha\mathbb{R}$ (1 点コンパクト化) とすれば $\gamma\mathbb{R} \leq \delta\mathbb{R}$ である。命題 3.4 より $\delta\mathbb{R}$ は $\mathbf{I} \times \gamma\mathbb{R}$ に埋め込めるコンパクト化で近似できる。 $\mathbf{I} \times \gamma\mathbb{R} \approx \mathbf{I} \times \mathbb{S}^1$ は \mathbb{R}^2 に埋め込むことができるので, 結局 $\delta\mathbb{R}$ は \mathbb{R}^2 に埋め込めるコンパクト化で近似できることになる。□

次元を一般化すると次が成り立つ。証明は定理 2.5 とほとんど同じである。

系 3.5. n 次元ユークリッド空間の任意のコンパクト化は $n+1$ 次元ユークリッド空間に埋め込めるようなコンパクト化で近似できる。□

4 連続関数環の生成元

さて, 最初の目標である定理 2.5 は証明されたわけだが, ここで近似に必要なコンパクト化の個数はどれくらいあれば十分なのか考えてみよう。そのためには命題 3.4 の証明を振り返ってみればよい。 κ を命題 3.4 における近似に必要なコンパクト化の数の最小濃度とすれば $\kappa \leq \text{card}(D \setminus A) \leq \text{card } D$ であるから, 大雑把に見積もれば

$$\kappa \leq \min\{ \text{card } D \mid \langle D \rangle = S(\delta X) \}$$

である。上式の右辺を $\text{gen } S(\delta X)$ とおこう。正確には, バナッハ環 A に対して, A を生成するために必要な集合の最小濃度

$$\text{gen } A := \min\{ \text{card } D \mid D \subset A, \langle D \rangle = A \}$$

と定義する。 $S(\delta X)$ と $C^*(\delta X)$ はバナッハ環として同型であったから $\text{gen } S(\delta X) = \text{gen } C^*(\delta X)$ である。実は, これは δX を埋め込めるチコノフ立方体の最小次元に一致する。つまり, チコノフ空間 Y に対して $\text{emb } Y$ を以下で定義される濃度:

$$\text{emb } Y := \min\{ \text{card } D \mid \exists \text{埋蔵写像 } : Y \hookrightarrow \mathbf{I}^D \}$$

とすれば, 次の命題から $\kappa \leq \text{emb } \delta X$ が得られる。

命題 4.1. 任意のコンパクト・ハウスドルフ空間 X について $\text{emb } Y = \text{gen } C^*(Y)$.

証明. (\geq) 埋蔵写像 $e : Y \rightarrow \mathbf{I}^{\text{emb } Y}$ を取り, $D = \{ \text{pr}_\lambda \circ e \in C^*(Y) \mid \lambda \in \text{emb } Y \}$ とすれば e の単射性から D は Y の各点を分離する。⁸ したがって Stone-Weierstrass の近似定理により $\langle D \rangle = C^*(Y)$ となる。ゆえに $\text{emb } Y \geq \text{card } D \geq \text{gen } C^*(Y)$.

⁸ $D \subset C^*(Y)$ が Y の各点を分離するとは, $f(x) \neq f(y)$ なる $f \in D$ の存在が任意の異なる 2 点 $x, y \in Y$ に対して言えることである。

(\leq) $\text{card } D = \text{gen } C^*(Y)$ かつ $\langle D \rangle = C^*(Y)$ を満たす $D \subset C^*(Y)$ を一つ固定する. $\langle D \rangle = C^*(Y)$ より D は Y の各点を分離する. したがって,

$$e : L \rightarrow \mathbf{I}^D, \quad e(x) = (f(x)/\|f\|)_{f \in D}$$

は連続単射であり, Y はコンパクト空間であるから埋蔵写像となる. ゆえに $\text{emb } Y \leq \text{card } D = \text{gen } C^*(Y)$. \square

系 4.2. 命題 3.4 において, 近似に必要なコンパクト化の数の最小濃度を κ とする. このとき $\kappa \leq \text{emb } \delta X$. \square

ウリゾーンの距離化定理によれば, 任意の第二可算⁹正則空間 X はヒルベルト立方体 \mathbf{I}^{\aleph} に埋め込める. つまり, X は可分かつ距離づけ可能となり, 第二可算正則空間と可分距離づけ可能な空間のクラスは一致する. 上で導入した記号を用いて言えば, チコノフ空間 X がこのクラスに属することは $\text{emb } X \leq \aleph_0$ であることと同値である. バナッハ環 A が $\text{gen } A < \aleph_0$ を満たすとき有限生成, $\text{gen } A \leq \aleph_0$ を満たすとき可算生成であると呼ぶことにすれば, 命題 4.1 の証明から次が分かる.

系 4.3. 任意のコンパクト・ハウスドルフ空間 Y について, Y が可分距離づけ可能 (かつ有限次元¹⁰) であるための必要十分条件は $C^*(Y)$ が可算生成 (有限生成) となることである. \square

一般のチコノフ空間 X に関しては次が言える. とくに X が局所コンパクトである場合は, γX として 1 点コンパクト化のみを考えればよい.

定理 4.4. 任意のチコノフ空間 X について, X が可分距離づけ可能 (かつ有限次元) であるための必要十分条件はある X のコンパクト化 γX について $C^*(\gamma X)$ が可算生成 (有限生成) となることである.

5 既存の近似定理の一般化

それでは最後に 2 節で述べた近似定理の一般化を与えよう. まずは次を示す.

補題 5.1. 任意の $\gamma X \in \mathcal{K}(X)$ および $g \in C^*(X)$ に対して, $A = S(\gamma X)$ とすれば次が成立する.

- (1) γX が距離づけ可能ならば $T(\langle A, g \rangle)$ も距離づけ可能である.
- (2) γX が Smirnov コンパクト化ならば $T(\langle A, g \rangle)$ も Smirnov コンパクト化である.

証明の概略. (1) は補題 3.3 から直ちに導かれる. γX が Smirnov コンパクト化であるとするれば, X のある許容可能な距離 d について $\gamma X \sim u_d X$ となる. $d'(x, y) = d(x, y) + |g(x) - g(y)|$ とすればこれも X の許容可能な距離であり, 更に $T(\langle A, g \rangle) \sim u_{d'} X$ となることが示せる. ゆえに $T(\langle A, g \rangle)$ も Smirnov コンパクト化である. \square

⁹位相空間が可算な開基を持つとき第二可算であると言う.

¹⁰ここでの次元は被覆次元を考えている. 任意の n 次元可分距離空間は \mathbf{I}^{2n+1} に埋め込めることが知られている.

定理 2.2 および事実 3.1 の一般化として次が得られる.

定理 5.2. 距離付け可能な空間 X のコンパクト化 δX に対して次が成立する.

- (1) δX が距離付け可能なコンパクト化で近似できるための必要十分条件は $\gamma X \leq \delta X$ なる距離付け可能なコンパクト化 γX が存在することである.
- (2) δX が Smirnov コンパクト化で近似できるための必要十分条件は $\gamma X \leq \delta X$ なる Smirnov コンパクト化 γX が存在することである.

証明. 必要性は明らか. 十分性は, 補題 5.1 を用いて命題 3.4 の証明と同様に $T(\langle A, g \rangle)$ たちで近似する. □

特異コンパクト化に関して次が成立する. 証明は省略する ([4]).

補題 5.3. 局所コンパクト空間 X の 1 点コンパクト化を αX とし $A = S(\alpha X)$ とする.¹¹ もし X が 2 点コンパクト化を持たないならば, 任意の $g \in C^*(X)$ に対してコンパクト化 $\alpha_g X = T(\langle A, g \rangle)$ は特異コンパクト化であり, その剰余 $\alpha_g X \setminus X$ は閉区間 I または 1 点集合と同相である.

局所コンパクト空間 X が無限遠で連結ならば 2 点コンパクト化を持たないという事実から, 次の定理は定理 2.1 および 2.3 の一般化であることがわかる.

定理 5.4. 連結な局所コンパクト空間 X について次は同値.

- (i) X は 2 点コンパクト化を持たない.
- (ii) X の任意のコンパクト化は剰余が閉区間 I または 1 点集合と同相なコンパクト化で近似できる.
- (iii) X の任意のコンパクト化は特異コンパクト化で近似できる.

証明. (i) \Rightarrow (ii) および (i) \Rightarrow (iii) は, 補題 5.3 を用いて命題 3.4 の証明と同様の手法で近似する. (ii) \Rightarrow (i) については対偶 $\neg(\text{ii}) \Rightarrow \neg(\text{i})$ を示すのが容易である. (iii) \Rightarrow (i) を背理法で示そう. もし X が 2 点コンパクト化 γX を持つとすれば (iii) より γX は特異コンパクト化で近似できるが, γX より真に小さいコンパクト化は 1 点コンパクト化しかないので γX 自身も特異コンパクト化である. ゆえにレトラクション $r : \gamma X \rightarrow \gamma X \setminus X$ が存在し, とくに X への制限 $r|_X$ は 2 点空間 $\gamma X \setminus X$ への全射である. これは X の連結性に矛盾する. □

証明から, 定理 5.4 における (i) \Leftrightarrow (ii) および (i) \Rightarrow (iii) は X の連結性がなくても成立することがわかる.

¹¹実は $S(\alpha X) = \{ f \in C^*(X) \mid \exists \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \} \simeq C_0(X) \oplus \mathbb{R}$ である.

参考文献

- [1] R.E. Chandler and G.D. Faulkner *Singular compactifications: the order structure*, Proc. Amer. Soc. **100** (1987), 377–382.
- [2] G.D. Faulkner, *Compactifications whose remainders are retracts*, Proc. Amer. Math. Soc. **103** (1988), 984–988.
- [3] G.D. Faulkner *Minimal compactifications and their associated function space*, Proc. Amer. Soc. **108** (1990), 541–546.
- [4] K. Mine, *Approximation theorems for compactifications*, preprint.
- [5] R.G. Woods, *The minimum uniform compactification of a metric space*, Fund. Math. **147** (1995), 39–59.