

前期期末試験の自由記述欄に書いて頂いたコメントに回答します。この企画において私が特に重視することは、「近くの学友が自分と比べてどれくらい高度な(あるいは低度な)ことを考えているか」を知ることにあります。それらを通して、今後の学習予定(さらにいえば人生設計)に活かしてもらいたいと考えています。

今回は、皆さんから次のような質問・コメントを頂きました。

- どうすれば単位がいただけるのでしょうか?
- レポートでもなんでもするので単位を下さい。
- 単位を落としそうなので、夏休み中などにやれば加点対象となるようなものを教えて頂きたいです。
- どうしても単位が切実に欲しいので、後期がんばります。
- 前回の中間、今回の期末とかなり低い点を取ってしまったと思います。どうしても単位が欲しいので、何か加点課題やレポート等を出してもらえないでしょうか。
- 前回の中間があまりにも悪かったので、この夏休みにきゅうさいのレポート課題を出していただけないでしょうか。
- 物理学を学ぶ上で厳密性は数学より低くてもかまわないのは実用を求めるためですか? また、どこまで厳密性を考えればいいのですか?
- 点列コンパクトの定義や  $a^b$  の定義などは、今後、直接計算に影響を与えるのですか。それとも直接ではないにしても、知っておかなければ計算のもととなる部分をしっかりと理解できなく、応用させることができなくなる、というようになるものですか。
- (期末試験の問題 10 において) 冪の話が出るとは思わなかった(泣)。
- 力学の授業の単振動の单元において、長い作業を通して 2 階の微分方程式を解きました。しかし私たちは単振動の解が波のような形(難しく言うと?sin や cos)になることは容易に想像できるため、長い作業を通して解にたどりついて「まあ当たり前だね」と感動はなく、ただ疲れるだけでした。このように物理好きの私はあまり数学に関心がありません。興味関心は人それぞれですが、先生の物理、数学に関する興味関心を熱く語って欲しいです。
- 現在まで人類が築き上げてきた科学は数学を駆使して発展してきた。しかし世界を記述するのに数学を利用しなければならない必然性はない。実際、いまだに世界を解明するには至っていない。もしかすると、数学でない何か別の学問、新しい思考体系が存在して、それこそが世界の真理であるかもしれない。そういった新しい考え方の可能性、数学の限界について先生のお考えをお聞きしたい。
- 中間の範囲がどうしても好きになれないのですが... 数学だからしょうがないんですけどあそこまでいくと、計算全くないし他の学問からの要請もなさそうなのです。先生はあの分野で面白いと感じた内容はありますか。
- 数字や数学の起源というのはわかっているのでしょうか?
- 今はほとんど抽象論ばかりで具体的に定理がどのように生かされているのか詳しいことはわかりませんが、コンピュータのない時代にテイラー展開はどう役に立ったのか気になりました。(もちろん微小角の sin の近似などで役立つとは思いますが。)

- 高校の時、作図可能数というものを証明したのですが、それはどのような時に用いられるものでしょうか？
- 集合論において、「連続体仮説」という問題があることを聞いたことがあるが、結局のところどういう話なのか？
- “証明終了” を意味する英語の略語として、“wwwww” (or “w5”) というのがあるそうですが、見たことはお有りですか？ Which was what we wanted (これが我々の求めたいものであった) の略だそうです。
- 大学における数学がどのように分類されているのか簡単に教えてください。どのような分野に分かれているかなど。
- 授業で使う専門用語は自然と習得したんでしょうか？
- 数学の抽象的な証明はどれも苦手です。
- 証明がとても苦手なのですが…。やり方を一度見ないと何をどうしていいのやらとなってしまいます。証明をする上での根本的な考え方を身につけるには、どのような練習がよいですか？ / 証明問題が得意になるには、どのような勉強法がいいと思いますか？
- 数学の証明、くせになって楽しいです。
- 研究内容の整理等のために愛用されているソフトがあったら教えてください。
- $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (f(a + \varepsilon) - f(a - \varepsilon)) = 0$  のとき  $f(x)$  は  $x = a$  で連続となるか。
- 距離空間  $X$  というのは、具体的にどのような空間であるのか。
- コンパクト性が難しかった。
- コンパクトでない空間をコンパクトにするのは難しいですか。周期条件を与えて丸めた(直線を円周と見なす)みたいな話(余剰次元の話)とはまた違う話ですか。
- 偏微分の記号  $\partial$  の読み方と由来を教えてください。
- 授業では収束半径のことを詳しくやっていなかったようなので少し疑問に思ったのですが、 $\sin$ ,  $\cos$ ,  $e^x$  など有用な関数ばかり収束半径がムゲン大で何か深い所でつながっているのかなと思いました。
- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  の形式的微分は定数項 ( $n = 0$  の項) が消えるため  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$  である。ここで、 $n = 0$  の項を無理矢理書けば  $\frac{x^{-1}}{(-1)!} = 0$  であるから  $\frac{1}{(-1)!} := 0$  と定めるとよいが、他に  $\frac{1}{(-n)!} := 0$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) とするに至る理由はあるか。
- 全微分はそれ自体は何か重要な意味(数学的でも物理学的でも)を持たないんですか？
- $D \subset \mathbb{R}^2$  を有界凸領域とする。各  $y \in \mathbb{R}$  について直線  $L_y := \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}\}$  と  $D$  が交わるとき、その共通部分  $L_y \cap D$  は線分であり、その左右の端点を  $(l_y, y), (r_y, y)$  とおく。また  $L_y$  と  $D$  が交わるような  $y$  の範囲における最小値および最大値をそれぞれ  $a, b$  とする。このとき、

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) \frac{\partial \eta(x, y)}{\partial x} dx dy &= \int_{[a, b]} \left( \int_{l_y}^{r_y} f(x, y) \frac{\partial \eta(x, y)}{\partial x} dx \right) dy \\ &= \int_{[a, b]} \left( [f\eta]_{l_y}^{r_y} - \int_{l_y}^{r_y} \frac{\partial f}{\partial x} \eta dx \right) dy = \int_{[a, b]} [f\eta]_{l_y}^{r_y} dy - \iint_D \frac{\partial f}{\partial x} \eta dx dy \quad (0.1) \end{aligned}$$

となる気がするが, (第2項)  $= \int_{\partial D} f \eta dy$  となるか? (ここで  $\partial D$  は  $D$  の境界を表す).

- 次の極限記号 (質問にあったものは主に微分記号, 積分記号, 無限和など) の順序交換ができる理由/条件は何か.
- デルタ関数について

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_a^{a+\varepsilon} (f(a) + O(x)) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(a)\varepsilon + O(\varepsilon^2)}{\varepsilon} = f(a)$$

としてよいか.

- フーリエ級数について, 関数の周期を無限大にするとき,  $\pm\infty$  型の不定形をどう扱えばよいか. フーリエ積分では  $\int_{-\infty}^{\infty} dk$  となることについての疑問である.
- $y'' + 2y' + 3y = 0$ ,  $\lambda = -1 \pm \sqrt{2}i$ .
- すべての線形変換  $f$  に対して次がいええるか: 基底が  $f$  で変換された座標系に固定された視点からは, 空間に固定されたベクトルは  $f^{-1}$  で移されて見える.
- 変換  $f$  と逆変換  $f^{-1}$  の表式が同じ形となるのは線形変換に限られるか.
- $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$  を以下のようにして示しました. 曖昧さはどこまでならば許されるのでしょうか.

$$\begin{aligned} e^x \cdot e^y &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right) \left( \sum_{m=0}^{\infty} \frac{y^m}{m!} \right) = \left( 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots \right) \left( 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \dots \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{x^m}{m!} \frac{y^{n-m}}{(n-m)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^n \frac{n!}{m!(n-m)!} x^m y^{n-m} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^n {}_n C_m x^m y^{n-m} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = e^{x+y}. \end{aligned}$$

(注意: ここで1行目の最後から2行目への式変形で次を用いた: 非負整数の組  $(n, m)$  に対して, 1行目最後の展開項  $\frac{x^m}{m!} \frac{y^{n-m}}{(n-m)!}$  は一意的に定まる.)

- $i^i$  について.  $z, w \in \mathbb{C}$  について,  $r, \theta \in \mathbb{R}$  を用いて  $z = e^r(\cos \theta + i \sin \theta)$  と表せるとき,  $z' := r + i\theta$  として

$$z^w = (e^r \cdot e^{i\theta})^w = (e^{r+i\theta})^w = e^{(r+i\theta)w} = e^{z'w}$$

となることが予想され, そこで

$$z^w := e^{z'w} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z'w)^n}{n!}$$

と定めるとよい気がする. この場合  $i^i = (e^{\frac{\pi}{2}i})^i = e^{\frac{\pi}{2}ii} = e^{-\frac{\pi}{2}}$  となる.

- 「 $f(z)$  が正則  $\iff f(z)$  が微分可能」か.
- $z = x + yi$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ) に対して,  $\partial_z = \partial_z(\frac{z+z^*}{2})\partial_x + \partial_z(\frac{z-z^*}{2i})\partial_y = (\partial_x - i\partial_y)/2$  としてよいか.
- 微積分の授業面白いです. / 授業は楽しかったです. / もっと数学が好きになりました. すべて微分できなかったのは許してください.
- 期末試験の問題 11 は「イカサマ3倍」のたとえ話を思い出しましたが, 楽しく頭を使うゲーム風な一方で今一つ納得しきれない何ともいえないかんじが面白かったです.

- クロアチアの話がよかったです。 / 旅の話は非常におもしろかったです。 / 一度、先生が海外へ行った期間の話、面白かったです。
- 夏休みにどこか旅行で行くことがあれば、またその話を後期におしえてください。
- 授業内での問題練習が増えるとうれしいです。でも授業の進むスピードなどは丁度良いです!
- 授業ちゃんと出ればよかった。(来期からはちゃんとでます)
- 資料9 Prop.2.2 にいきなりでてくる  $y$  がよく分からなかった。
- 単位を取るために効果的な勉強の仕方を教えて下さい。
- 早く試験が終わって遊びたいです。 [顔文字]
- 今まで授業のために買ったTシャツの総額っていくらくらいなんですか?
- とうかプライベートでは着てるんですか?
- Tシャツの選び方のコツを教えてください。
- ユニ○ロ・ユーザーです。おすすめのTシャツを教えてください。
- 面白Tシャツ2回同じのを着ていたことありましたよ! / 1度Tシャツが初回とカブったときがありましたが、Tシャツのネタがきれいなんですか?
- 「数学解くガウス」を逆から読むとどうなるか。
- 幸太郎先生の弟子になりたいです。
- き○この山とたけ○この里ではどちらが好きですか。
- 我々人類の存在意義があることを論理記号を用いて証明せよ。
- 今の職業(数学講師)についてどう思いますか?
  - きっかけは何ですか?
  - なりたかった職なのですか?
- 先生の今後の人生計画を教えてください。(老後は縁側でゆっくり過ごしたいとか。)
- Facebookで調べた彼女との出会い、また告白の仕方、断られ方等も是非ききたいです。 / さしつかえなければ、もう少し先生の恋愛の話が聞きたいです。

## 1 単位に関する話題

- どうすれば単位がいただけるのでしょうか?
- レポートでもなんでもするので単位を下さい。
- 単位を落としそうなので、夏休み中などにやれば加点対象となるようなものを教えて頂きたいです。
- どうしても単位が切実に欲しいので、後期がんばります。
- 前回の中間、今回の期末とかなり低い点を取ってしまったと思います。どうしても単位が欲しいので、何か加点課題やレポート等を出してもらえないでしょうか。

- 前回の中間があまりにも悪かったので、この夏休みにきゅうさいのレポート課題を出していただけないでしょうか。

回答. 上記にある単位に関する事柄は当授業において最重要事項であるため、後期第1回目の授業の際に説明します。

## 2 どこまで学ぶべきか

- (1) 物理を学ぶ上で厳密性は数学より低くてもかまわないのは実用を求めるためですか？ また、どこまで厳密性を考えればいいのですか？

回答. 数学以外の諸科学においても議論を曖昧にしてよいということは決してありません。例えば、ある理論 A において数学的に曖昧な部分 B があると感じた場合は、「B が解消されるならば A が成り立つ」という立場に立つのであれば、これは厳密な議論と言えるでしょう。そして、「B が解消されるならば」という部分をいかに解決するか、という問題は数学的な議論になりますから、これは数学の授業 (あるいは数学者の仕事) に譲ることになります。

どこまで厳密性を考えればよいかを一般論として論じるのは難しいと思います。一つ言えることは、数学的な細かい部分に注意を払い過ぎてしまい、本題について時間が割けなくなるとは本末転倒だということです。そこで、諸科学について学ぶ際は、数学的曖昧さがどこにあるかきちんと把握しておき、その部分がどうしても気になるようなら調べてみる、とするのがよいでしょう。

- (2) 点列コンパクトの定義や  $a^b$  の定義などは、今後、直接計算に影響を与えるのですか。それとも直接ではないにしろ、知っておかなければ計算のもととなる部分をしっかりと理解できなく、応用させることができなくなる、というようになるものですか。

回答. 今後も指数法則を用いた計算を行うことがあるかと思いますが、仮に  $a^b$  の定義や指数法則の証明を確認していなかった場合、そこでの議論は「実数幂がきちんと定義され、かつ指数法則が成り立つと仮定するならば、以下の計算が成立する…」といったものにならざるを得ませんが、それでも応用はできますし、基礎的な理解が計算作業に直接影響を及ぼすことは稀でしょう。ただし、この手の議論は、確認を怠った仮定が間違っていることが後で分かり、空論となる危険性があります。

大先生が指数法則は正しいと言っているのだから、それを盲目的に信じて議論を進めよう、という考え方も処世術としては有効かもしれませんが、しかし、重いものが先に落ちるといって古代ギリシャ以来の発想を信じなかったガリレオの仕事から近代科学が始まった、という歴史を忘れてはなりません。

- (3) (期末試験の問題 10 において) 冪の話が出るとは思わなかった (泣)。

回答. 社会人になったあとでも、おそらく何かの機会で数の定義に関する話題に触れることがあるでしょう。その意味において、たとえ数学と無縁な社会生活を送ることになる人にとっても問題 10 は有意義なものといえそうです。

まとめ. あまり数学を勉強し過ぎると物理の勉強に時間をさくことができなくなるし、一方で数学の定理を盲目的に信じれば、それらを用いた議論が空論になる恐れがある。一個人が全てを学びつくすことは不可能ですから、何をどれだけ学ぶかは私たち個人ひとりひとりが自分で決断するしかないのです。

### 3 数学について思うこと

- (1) 力学の授業の単振動の単元において、長い作業を通して2階の微分方程式を解きました。しかし私たちは単振動の解が波のような形(難しく言うと $\sin$ や $\cos$ )になることは容易に想像できるため、長い作業を通して解にたどりついて「まあ当たり前だね」と感動はなく、ただ疲れるだけでした。このように物理好きの私はあまり数学に関心がありません。興味関心は人それぞれですが、先生の物理、数学に関する興味関心を熱く語って欲しいです。

回答. 高校物理で振り子について学んだとき、 $\theta$ が十分小さいため $\sin\theta$ を $\theta$ に置きかえる、という議論が自然な議論であるとは到底思えず、したがって物理は、何を何に置き換えて良いかをあらかじめ覚えねばならない暗記科目であるという印象を受けました。後に大学に入ってから置き変えて良い根拠を学ぶことになるわけですが(期末試験でも出題しました)、高校生の私にとっては物理を学ぶことを挫折させる大きな事件であり、出会った時期の違いでその後の人生が大きく変わってしまうことへのもどかしさを感じています。

さて、方程式を解くことの不毛さについてコメントします。微分方程式の解が波になることは確かに予想できることですが、波のような形をした関数は三角関数のほかにも無数にあるはずですが。それら無数の波の中から真の答えを導き出すことに、細かい議論を行った意義があるのではないのでしょうか。数値の精度が求められる世界では、何となく似ている関数で代用するというわけにはいかず、真の答えが必要となるからです。

- (2) 現在まで人類が築き上げてきた科学は数学を駆使して発展してきた。しかし世界を記述するのに数学を利用しなければならない必然性はない。実際、いまだに世界を解明するには至っていない。もしかすると、数学でない何か別の学問、新しい思考体系が存在して、それこそが世界の真理であるかもしれない。そういった新しい考え方の可能性、数学の限界について先生のお考えをお聞きしたい。

回答. 仮に世界を記述するための基礎となる新しい何かが発見されたとしても、それを今後、誰が学生に教えるべきかという問題を考えると、おそらく数学の先生が担当を任される可能性が高いのではないのでしょうか。つまり、世界を記述するための基礎的な学問のことを数学と呼ぶという考え方があります(mathematicsの語源は「学ばれるべきもの」だそうです)。もちろん、既存の数学者では到底太刀打ちできそうにない新しい基礎学問が生まれる可能性もあり得ますが、そうした新たな世界観のもとでは、もしかすると現在の学問体系は意味を成さなくなるかもしれません。そうなると、アリストテレス以来の学問体系の再編成という、壮大な哲学的課題が待ち受けることになるでしょう。刺激的な世界になりそうです。

- (3) 中間の範囲がどうしても好きになれないのですが... 数学だからしょうがないんですけどあそこまでいくと、計算全くないし他の学問からの要請もなさそうなのです。先生はあの分野で面白いと感じた内容はありますか。

回答. この講義では高校数学流の連続関数の定義を論じるために点列の収束概念を厳密に定めることから出発しました。また、 $\varepsilon$ - $\delta$ 論法による連続性の定義も与えました。これらはいずれも非常に込み入った定義であるとお感じの方も多いかと思いますが、最終的には「開集合の逆像は開集合」という、まるで格言のような簡潔な言葉で表せてしまうという結論には驚きを隠せません。この例のように、難しい議論を通して最後に格言らしきものが得られるということに学問の醍醐味があると思います。ただし、これは数学に限る話ではありません。

なお、連続性を記述するための開集合をはじめとする様々な抽象概念は、今後の解析学の学習においても何度か用いられることでしょう。解析学で必要ということ、そこから派生

する微分方程式論や確率論, 統計学といった応用が期待される数学の諸分野へ進む際にも避けて通れない概念であることを意味します. また, これらの概念は図形を分析する道具として幾何学では陰に陽に用いられます. 図形を分析する方法論ということであれば, もしかすると他の学問からの要請もあるかもしれませんね (例: 宇宙はどのような形をしているのか).

## 4 数学一般に関する質問

- (1) 数字や数学の起源というのはわかっているのでしょうか?

回答. 一つの学問としての数学が認識されたのは恐らく古代ギリシャ以降だと思いますが, 数学史は専門外のため, 何をもって起源とするか, という点について学問的なことを申し上げることはできません. しかし, 初等的な数学的知識の多く, 例えば数や図形に関する知識は, 文明社会 (とくに農耕社会) を運営する上でかかせないものであり, そのあたりに数学らしきものの起源があると考えられます. 例えば図形の面積に関する知識は作物の収穫量の予想に用いられ, 実際の収穫量の集計にもそれなりの計算技術が必要でした. また, 農耕は年間を通して計画的に営まれるものであり, そのためには暦を作る必要がありました. これには天体観測が重要な役割を果たしましたが, 星の運動周期の計算に数学が用いられました. そして, これらを応用して川の氾濫や日食が予言できることは, 社会の指導者層の宗教的価値を確固たるものにしたことでしょう. このように, 古代文明の発達とともに数学的知識が育まれ, それらは主に時空を支配するための技術に用いられたと考えられます. 数字の起源は, 他の文字の起源と同程度のことが分かっています. 私たちが普段使っているアラビア数字の起源はインドにあり, この系統にあるインド最古の数字は少なくとも紀元前3世紀には使われていたことが確認されているそうです.

- (2) 今はほとんど抽象論ばかりで具体的に定理がどのように生かされているのか詳しいことはわかりませんが, コンピュータのない時代にテイラー展開はどう役に立ったのか気になりました. (もちろん微小角の  $\sin$  の近似などで役立つとは思いますが.)

回答. ご指摘の通り古くから近似計算に用いられています (例: 円周率の計算). ご質問については, 何をもって「役立つ」とするかが難しく, また, コンピュータのなかった時代をいつ頃までとするかも難しい. しかしいずれにせよ, 現代の私たちがイメージするようなコンピュータは少なくとも20世紀の始めにはなかったことでしょう. この時代には既に多くの科学・技術が開発されており, そこでは様々な数学理論が使われたはずで, もはや公式一つ一つがどう役に立ったのかを分析できるほど単純な話ではなくなっていたのではないのでしょうか.

数学的理解の側面においてテイラー展開が役立つ例として, 講義でも紹介したオイラーの公式  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$  を挙げておきましょう. この例は, 関数を分解して調べてみることで, 別の関数との関係を見出すことができるということを示唆しています.

- (3) 高校の時, 作図可能数というものを証明したのですが, それはどのような時に用いられるものなのでしょうか?

回答. 作図可能数という言葉は存じあげませんが, おそらく数直線上に原点と1を表す点が図示されているとき, そこからメモリのない定規とコンパスのみを用いて新たに定めることのできる点に対応する数のことを指すのではないかと予想します. 例えば単位円と同じ面積の正方形の一辺の長さ (つまり  $\sqrt{\pi}$ ) や単位立方体の二倍の体積をもつ立方体の一辺の長さ (つまり  $\sqrt[3]{2}$ ) に対応する点は, 定規とコンパスのみの作図では図示できないことが知られています.

このように、数学では実行不可能であることを証明することができます。定規とコンパスによる角の三等分線や、5次方程式の四則演算と根号のみによる解の公式の導出などが不可能な例として有名です。不可能性の証明は一見すると不毛にも思えますが、不可能であるにもかかわらず可能性を見出そうとすることのほうがもっと不毛であり、こうした不毛な努力を避けられることに不可能性の証明の意義があるといえるでしょう。数学を応用する仕事の中にも「いくつかの仮定の下で、これこれのみを用いて答えを見いだせるか」というタイプの課題はたくさんあり、不可能性を論じられるよう論理力を高めることは決して無駄なことではありません。

- (4) 集合論において、「連続体仮説」という問題があることを聞いたことがあるが、結局のところどういう話なのか？

回答.  $\mathbb{N}$  と  $\mathbb{R}$  と対等<sup>1</sup>でない部分集合  $X \subset \mathbb{R}$  は存在するか？という問題のことで、集合論の創始以来の難問とされてきました。このような  $X$  は存在しないという立場を連続体仮説といいます。現在では、連続体仮説およびその否定のいずれも集合論の公理系からは導けないことが分かっており、これ以上この問題について論じるならば、私たちは連続体仮説とその否定のどちらか一方を(何らかの根拠あるいは哲学を提示した上で)公理として選択する必要に迫られることになります。

数学の問題ならばいずれは白黒つけられる、というわけでもないことをこの問題は示唆しています。

- (5) “証明終了”を意味する英語の略語として、“wwwww” (or “w5”) というのがあるそうですが、見たことはお有りですか？ Which was what we wanted (これが我々の求めたいものであった)の略だそうです。

回答. ウィキペディアにもあるようですが、外国の方が用いている場面に遭遇したことはありません。日本語ではインターネットスラングの“草”と混同される可能性が高いかもしれませんね。

- (6) 大学における数学がどのように分類されているのか簡単に教えてください。どのような分野に分かれているかなど。

回答. 私が担当する線形代数の講義ノート内の一項目を次に引用します (web 上で入手することができます)。

#### 4.1 数学概論 (線形代数学講義ノートからの引用)

線形代数学はその名前から想像するに代数学の一部であり、代数学はもちろん数学の一部である。数学における線形代数の位置を知るために、数学の各分野について簡単に触れておこう。なお、この講義では、いくつかの数学的概念について、それが数学のどの分野へ繋がっていくかを後で解説する予定であり、その際の予備知識という意味も込めてこれを書いている。

さて、伝統的には、数学は代数・解析・幾何の三分野に大別される。もちろん、これは大まかな分類であり、数学の各分野はすべてこのいずれかに属するというわけではない。むしろ数学は、この三分野の考え方を駆使して研究されていると考えるべきである。これから三分野の簡単な説明を与えるが、ここで述べていることは、予備知識の無い初学者には想像しにくいことかもしれない。しかしながら、数学をある程度学び終えた後でもう一度読んで頂ければ、より深い理解が得られるはずである。

<sup>1</sup>復習: 全単射  $f: X \rightarrow Y$  が存在するとき、集合  $X$  と  $Y$  は対等であると言う。



**代数** 代数学とは、簡単に説明すれば四則演算の技法を高める学問ということになる。例えば小中学校で学んだ計算問題などがこれに相当する。しかしながら代数学の神髄は、二つの異なる世界を一つの見方で繋げることにあると言えるだろう。これについては本節の後半で例を挙げて説明する。さて、代数学の中には数論・群論・体論・環論などがある。数論は素数の性質を調べる分野で、最大公約数や最小公倍数の問題を扱った経験のある一般の人にとって最もなじみの深い数学である。群論とは、図形をはじめとする様々な数学的構造の対称性を研究する分野であり、体論とは四則演算が成立する世界をいくつも考えだし、それらの間にある関係を群論を通して調べるものである。環論の説明を予備知識なしに述べるのは難しい。線形代数をこれら四分野のどこに入れるか、あえて考えると、環論に属することになる。

**解析** 高校で学んだ微分や積分などに現れる極限操作を扱う数学を解析学という。もちろん複素数の範囲も含めた関数の解析も扱われる(関数論)。自然科学の法則(物理法則だけとは限らない)を記述する式の多くは微分積分の記号を用いて表され、これらは微分(積分)方程式と呼ばれる。こうした方程式の解を探す手法や、解が満たす性質を研究することが解析学の主な目的であり、したがって実用的な諸科学と最も関係の深い分野とも言えるだろう。解析学において厳密な論理展開を行うには $\varepsilon$ - $\delta$ 論法の会得はもちろんのこと、関数の列に関する収束・発散の精緻な議論(関数解析学)が必須であり、そのための基礎としてルベーグ積分というキーワードがあることを覚えておくとよい。また積分論は、統計学の基礎となる確率論(大数の法則、中心極限定理など)とも深い関わりを持っている。

**幾何** 空間図形を扱う数学を幾何学といい、現代の幾何学は微分幾何学と位相幾何学(トポロジー)に大別されている。前者は面積や体積など量的な調べかたを下地にした幾何学であり、後者は図形の持っている性質の違いに着目する幾何学である。図形の性質とは、例えば円上の1点を切り離してもまだ繋がったままだが、線分で同じことを考えると二つに分離されてしまうといった具合である。いずれの幾何学も多様体の構造を調べることが念頭にある。大航海時代以前の人々は、世界の形が平らで海が無限に広がっているのか、それとも球の形をしているか、あるいは第三の可能性はあるか(例えばドーナツ型など)という問題に挑むには、限られた観測結果と頭の中の想像を頼りに結論づけるしかなかった。多様体論とはこれの多次元版に相当する。つまり、宇宙の形の可能性について追求する数学である。

いま挙げたのは数学のほんの一部であり、すべてが列挙されたわけではない。例えば複数の分野にまたがる数学については何一つ述べていないし、特に応用数学については何も述べていない。このほか、数学それ自体を問う分野もある。一つは数学の歴史を紐解く数学史に関する分野であり、もう一つは数学の証明の厳密性について論じる数学基礎論(数理論理学)である。

最後に線形代数学について簡単に説明しよう。線形代数学とは、線形写像(線形関数)を解析するための理論の総称である。線形写像とは、大雑把に言えば比例関数の多変数化に相当し、ゆえに線形写像は定数関数の次に単純な関数といえる。自然科学が、自然界の現象を出来る限り単純なモデルに落とし解析する学問のことであるとすれば、定数関数の次に単純な構造を持つ線形関数がそこで大きな役割を果たすであろうことは想像に難くない。そして事実、我々人間が考える数学的対象の多くに線形性が潜んでおり、それゆえに線形代数学は理工系分野で求められる基本的な素養の一つとなっている。

それでは、線形写像の説明を試みるために、やや退屈ではあるが、集合や写像、そしてベクトルの和とスカラー倍について復習しよう。

## 5 数学の学び方

- (1) 授業で使う専門用語は自然と習得したんでしょうか？

回答. 聞いた瞬間に忘れないものもあれば, すぐには覚えられずに暗記したものもあります. 定義を覚えるコツとしては, 自分ならばその概念にどんな定義を与えるかを考えてみるとよいでしょう. すると, まともな思考をしていれば結果的に教科書の定義と一致する(あるいは同値な定義になる)ことが多く, そうであるならば定義を覚える必要はありません(毎回自分で定義をあみだせばよいから). あるいは, その概念が必要なのは何故か, ということを考察することも, 定義に至る思考を助けてくれるでしょう. 要は, 思考実験を色々としてみるのが理解への道となります. もちろん, こうした考察がいつも上手くいくわけではなく, そのような場合は暗記しなければなりません. 加えて, 重要な定理に現れる何らかの条件に名前をつける, という形で定義される概念については, 丸暗記するしかないでしょう(例: コンパクト性, 開集合を用いた連続性の定義).

- (2) 数学の抽象的な証明はどうも苦手です.

回答. 実は, 多くの場合において, 具体的な例を思い浮かべながら証明を考えています. 例えば, 距離空間に関する命題を証明するとき, まず特別な場合として平面  $\mathbb{R}^2$  についての証明を考えています. そして, その証明の中で平面に特有の性質が用いられていないことに気づけば, 距離空間に関する一般論として命題の証明が得られるのです.

- (3) 証明がとても苦手なのですが… やり方を一度見ないと何をどうしていいのやらとなってしまいます. 証明をする上での根本的な考え方を身につけるには, どのような練習がよいですか? / 証明問題が得意になるには, どのような勉強法がいいと思いますか?

回答. 元も子もない回答になってしまいますが, 計算問題と同じで, これは慣れとしか言いようがありません. 計算方法を理解していてもミスが多いという人は, 練習をこなして計算精度を上げる以外に上達する道はないでしょう. これは, 論理的な理解と実際にできるかどうかの間には差があることを意味しています. スポーツ競技においては, この差が明確にあり, それを補う方法は練習のほかにはないことは誰もが分かっていることです. 計算にしろスポーツ競技にしろ証明にしろ, 出来るようになるには数をこなすしかありません.

- (4) 数学の証明, くせになって楽しいです.

回答. 証明をよくよく振り返ってみると, 定義にある性質を無理なく自然に用いていることに気が付きます. こうなると, 短い証明ならばすぐに思いつくため, 証明を覚える努力は不要になります. 事実, 前期の前半部分で配布した資料の命題と証明を構成する際, 私は参考書等を何も見ずに書きました<sup>2</sup>. この事実は, 上手い定義を与えることがいかに重要かを示唆しています.

- (5) 研究内容の整理等のために愛用されているソフトがあったら教えて下さい.

回答. OS が数年おきに更新されるため, そのたびに利用するソフトが変わり, 愛用しているものではありません. パソコンを買い替える度にファイルの整理には困っています. クラウド化するのがよいのかもしれませんが.

## 6 位相について

- (1)  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (f(a + \varepsilon) - f(a - \varepsilon)) = 0$  のとき  $f(x)$  は  $x = a$  で連続となるか.

<sup>2</sup>実は, 資料 10 の命題 9.6 および 9.7 のみ証明が直ちに思いつかず, 参考書から引用しました.

回答. 連続になるとは限りません. 例えば  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  を

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{Q} \text{ のとき}), \\ -1 & (x \notin \mathbb{Q} \text{ のとき}). \end{cases}$$

と定めれば,  $a = 0$  において  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (f(a + \varepsilon) - f(a - \varepsilon)) = 0$  を満たしますが,  $f$  は  $a = 0$  で不連続です.

- (2) 距離空間  $X$  というのは, 具体的にどのような空間であるのか.

回答. 具体例を聞いているのか, それとも距離空間という枠組みの抽象性に対する具体性(?) について訊ねているのか, 質問の意図が分かりかねますが...

数直線  $\mathbb{R}$  や平面  $\mathbb{R}^2$ , 3次元空間  $\mathbb{R}^3$  など, そしてこれらの空間内に配置される図形はすべて距離空間の例になります. こうした様々な空間や図形の性質を一斉に論じる枠組みとして距離空間が導入されるのです.

上に挙げた具体例についての議論と, 距離空間という抽象的な枠組みにおける議論の間には, 思考の段階としての大きな差があります. 前者は距離の定義が具体的に分かっており, 何について調べているのか明確です. いっぽう後者は, 距離の定義はおろか, どんな形の図形(集合)であるかも提示されていない状況で論じなければならず, その抽象的思考にいまひとつ掴みどころがないという感覚を初学者は抱くことでしょう. しかしながら, このような抽象化は距離空間に限った話ではなく, 関数の具体的表示を与えずに  $f(x)$  と記したり, 行列の各成分情報を忘れて  $A$  と表記して論じるなど, 皆さんになじみのある数学においても既に行われていることです. 関数や行列の抽象化と同じと考えれば, 具体的でないことへの不安も少しは和らぐのではないのでしょうか.

- (3) コンパクト性が難しかった.

回答. 定義が非常に抽象的なのが困りものですが, 大雑把に言えば「無限に広がらない図形」を数学的に表現したものということになります. コンパクト性からは多くの扱いやすい性質が導かれるため, 論理の技術的な理由によりコンパクト性を仮定して話をするという面も若干ながらあります. 今後の数学的議論においても, きっと御利益があることでしょう.

- (4) コンパクトでない空間をコンパクトにするのは難しいですか. 周期条件を与えて丸めた(直線を円周と見なす)みたいな話(余剰次元の話)とはまた違う話ですか.

回答. コンパクトでない空間をコンパクトにする方法はたくさんあります. ここでは二つほど紹介しましょう.

方法1: 無限遠点  $\infty$  なる点を付け加える. これを  $\mathbb{R}$  に対して適用すると,  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  は円周  $S^1$  と1対1の対応がつかます<sup>3</sup>. また,  $\mathbb{R}^2$  (あるいは  $\mathbb{C}$ ) に対して適用すると,  $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$  は球面  $S^2$  になります(リーマン球面と呼ばれる). なお, これらは3次元以上においても一般化され,  $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$  は  $n$ 次元球面  $S^n$  になります. とくに3次元球面(これは  $\mathbb{R}^3$  内の図形としては実現できない)をとらえる際に, これを  $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$  と見ることで, そのイメージを膨らませることができます.

方法2: 空間上のいくつかの点を同一視する(商集合を考える)ことでコンパクトにする. 例えば  $\mathbb{R}$  の点  $a, b$  について,  $a - b \in \mathbb{Z}$  が成り立つときに  $a$  と  $b$  を同じ点である(同一視する)と考えると  $\mathbb{R}/\sim$  は円周になります. もし  $a, b \in \mathbb{R}$  が上の意味で同一視されるとき, 任意の周期1の関数  $f$  において  $f(a) = f(b)$  が成り立ちますから,  $a, b$  を周期1の関数で区別

<sup>3</sup>例えば次のようにして円周から  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  への全単射が定められる:  $\mathbb{R}^2$  内の点  $(0, 1)$  を中心とする半径1の円を  $S$  とし, この円の頂上を点  $\mathbf{a} = (0, 2)$  とする. 点  $\mathbf{a}$  を  $\infty$  に対応させ,  $S$  上の  $\mathbf{a}$  以外の任意の点  $\mathbf{b}$  については  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  を通る直線と  $x$  軸との交点を対応させれば, これは  $S$  から  $x$  軸  $\cup \{\infty\}$  への全単射を与える. 2次元以上の場合についても, この対応は一般化できる.

することはできません。これは周期1の関数が $\mathbb{R}/\sim$ を定義域とする関数であるとも見なせることを意味しており、上述の「周期条件を与えて丸めた」というのがこの方法に相当します。余剰次元の話と関係があるかどうかは私にはよく分かりません。

ちなみに方法2の2次元版を考えて、 $\mathbb{R}^2$ 上の点 $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ ,  $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ について、 $a_1 - b_1 \in \mathbb{Z}$ かつ $a_2 - b_2 \in \mathbb{Z}$ が成り立つときに $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ を同一視すると、ドーナツの表面と似た図形 $\mathbb{R}^2/\sim$ (これをトーラスとよび $T^2$ と書く)が得られます。コンピュータRPGの世界の多くが $T^2$ であることにお気づきでしょうか。ファミコン時代のRPGの世界地図は256マス×256マスであることが多く、この世界地図上で東西南北いずれか一方向に256マス進むと元の位置に戻ってきます。これは、現在地とそこから256マス北の地点を同一視していることに相当します。上の $\mathbb{R}^2$ の同一視においては、現在地から北に1進んだ点を同一視していたのです。

## 7 微積分について

- (1) 偏微分の記号 $\partial$ の読み方と由来を教えてください。

回答.  $d$ をやわらかくした記号で、ディーあるいはデルと呼びます。またTeXにおけるコマンド名はpartialです。

- (2) 授業では収束半径のことを詳しくやっていなかったようなので少し疑問に思ったのですが、 $\sin$ ,  $\cos$ ,  $e^x$ など有用な関数ばかり収束半径がムゲン大で何か深い所につながっているのかなと思いました。

回答. 収束半径が無限大の関数とは何か、と問われれば、とても行儀のよい関数のことと言えるでしょう。複素関数論においては、収束半径は一番近い特異点までの距離に相当し、特異点の分析を通して定義域の図形の性質や関数の特長などが調べられています。

- (3)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ の形式的微分は定数項( $n=0$ の項)が消えるため $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ である。ここで、 $n=0$ の項を無理矢理書けば $\frac{x^{-1}}{(-1)!} = 0$ であるから $\frac{1}{(-1)!} := 0$ と定めるとよいが、他に $\frac{1}{(-n)!} := 0$  ( $n \in \mathbb{N}$ )とするに至る理由はあるか。

回答. 階乗概念は、ガンマ関数( $\Gamma$ 関数)によって負の整数を除くすべての実数にまで拡張されます。ガンマ関数の定義や性質は教科書をご覧ください( $\Gamma(x)$ をガンマ関数とすると、非負整数 $n$ について $\Gamma(n+1) = n!$ が成立する)。 $x$ を負の整数に近づけると $\Gamma(x+1)$ は $\pm\infty$ に発散し、このとき $\frac{1}{\Gamma(x+1)}$ は0に収束します。

- (4) 全微分はそれ自体は何か重要な意味(数学的でも物理学的でも)を持たないんですか?

回答. 2変数関数 $f(x, y)$ の全微分 $df = f_x dx + f_y dy$ に現れる $f_x, f_y$ を合わせた組 $(f_x, f_y)$ は、接平面の傾きに関する情報を持つ(平面の方程式は $z = ax + by + c$ と書かれるため、傾きの情報は組 $(a, b)$ で表される)と講義では解説しました。また、組 $(f_x, f_y)$ を列ベクトル表記したものを勾配と呼び、 $\text{grad } f$ と書きます。これは曲面 $z = f(x, y)$ の等高線に垂直な方向を意味するのです。

3次元の場合については $\text{rot} \circ \text{grad} = 0$ および $\text{div} \circ \text{rot} = 0$ なる関係式を物理で学びます。勾配 $\text{grad}$ , 回転 $\text{rot}$ , 発散 $\text{div}$ のなす作用は数学(ベクトル解析)においてはすべて $d$ で表され、いまの関係式を $d \circ d = 0$ と書きます。これは「2回操作をほどこすと消える」ことを示す式であり、幾何学的には図形の縁(ふち)を与える操作を2回続けて行くと空集合になること、すなわち、ある図形の縁となるような図形には縁が存在しない、という事実と関係があることが知られています。

例: 2次元の図形である円盤の縁は円周 (1次元) であり, 円周には縁がない. ドーナツ型の3次元の図形 (これをソリッド・トーラスという) の縁はトーラス (曲面, つまり2次元) であり, トーラスには縁がない.

- (5)  $D \subset \mathbb{R}^2$  を有界凸領域とする. 各  $y \in \mathbb{R}$  について直線  $L_y := \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}\}$  と  $D$  が交わるとき, その共通部分  $L_y \cap D$  は線分であり, その左右の端点を  $(l_y, y), (r_y, y)$  とおく. また  $L_y$  と  $D$  が交わるような  $y$  の範囲における最小値および最大値をそれぞれ  $a, b$  とする. このとき,

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) \frac{\partial \eta(x, y)}{\partial x} dx dy &= \int_{[a, b]} \left( \int_{l_y}^{r_y} f(x, y) \frac{\partial \eta(x, y)}{\partial x} dx \right) dy \\ &= \int_{[a, b]} \left( [f\eta]_{l_y}^{r_y} - \int_{l_y}^{r_y} \frac{\partial f}{\partial x} \eta dx \right) dy = \int_{[a, b]} [f\eta]_{l_y}^{r_y} dy - \iint_D \frac{\partial f}{\partial x} \eta dx dy \quad (7.1) \end{aligned}$$

となる気がするが, (第2項)  $= \int_{\partial D} f\eta dy$  となるか? (ここで  $\partial D$  は  $D$  の境界を表す).

回答. 上の右辺の値は, 第1項に一致します. 微分1形式  $0dx + f\eta dy$  に対してグリーンの定理を適用すれば,

$$\int_{\partial D} f\eta dy = \int_{\partial D} 0dx + f\eta dy = \iint_D \left( \frac{\partial}{\partial x} (f\eta) - 0 \right) dx dy = \iint_D \left( \frac{\partial f}{\partial x} \eta + f \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) dx dy.$$

最後の式が第1項  $\int_{[a, b]} [f\eta]_{l_y}^{r_y} dy$  に等しいことは, 式(7.1)を移項することで得られます.

- (6) 次の極限記号 (質問にあったものは主に微分記号, 積分記号, 無限和など) の順序交換ができる理由/条件は何か.

回答. 微分記号と積分記号の交換が可能な条件の一部については後期の講義でも扱う予定です. 実は, この授業で学ぶリーマン積分は極限操作との相性が悪く, 強い仮定の下でしか交換可能性を証明できません. また, その証明も難解であることが知られています. 一方で, より弱い条件のもとで順序交換可能性を証明する理論として, ルベーク積分論 (測度論) があります. しかし, ルベーク積分の定義に至るまでに十分な学習時間が必要になるため, 数学を応用する立場からはこの理論に深く触れるのは難しいかもしれません. なお, 一般の大学の理学部数学科のカリキュラムにおいては, 3年次生前後を対象にルベーク積分論を展開し, そこで示されるルベークの収束定理を根拠として, 様々な条件のもとでの積分と極限記号の順序交換可能性について学びます.

以上をまとめると, 積分と極限記号の交換可能条件について深く学びたいのであれば, ルベークの収束定理についてある程度理解し, その応用例を学んでゆくという方法がよいでしょう.

- (7) デルタ関数について

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x-a) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_a^{a+\varepsilon} (f(a) + O(x-a)) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(a)\varepsilon + O(\varepsilon^2)}{\varepsilon} = f(a)$$

としてよいか.

回答. 定積分は, 関数に対して定義される概念でした.  $\delta$  は関数ではありませんから, 左辺を通常の積分として定義することはできません. また, 有限点で無限大に値を持つ関数に対して広義積分を定めることもできますが, その方向では望ましい結果は得られないでしょう. したがって左辺は, これまでの積分とは別種の新たな概念として定義しなければなりません. そこで, 広義積分の亜種らしきものとして中央の式で定める (パルス関数の極限と

してデルタ関数を定める) という方法が考えられます. ただし, そのように定義した場合に既存の積分の諸変形と同等のことができるかどうかは, あらかじめ別途確かめる必要があることを忘れてはなりません.

デルタ関数をパルス関数の極限として定義するのではなく, 各関数  $f$  に対して  $f(a)$  を対応させる写像, つまり関数の空間を定義域とし実数に値を持つ写像 (これは線形写像になる) を与えるもの, とみなす考え方もあります.

- (8) フーリエ級数について, 関数の周期を無限大にすると,  $\pm\infty$  型の不定形をどう扱えばよいか. フーリエ積分では  $\int_{-\infty}^{\infty} dk$  となることについての疑問である.

回答. フーリエ積分において何を論じたいのか, という全体像を把握するためには, このような考え方 (細かい論点に目をつぶってフーリエ級数の周期を発散させてみる) は有効でしょう. しかしながらその際に, 考え方の指針を理解することと論理的整合性を同時に論じなければならないと思いき必要はありません. どのような関数についてフーリエ積分の公式が成立するかという問題は, フーリエ積分の定義のみを通して数学的に議論すればよいのです. その議論の際に, 周期が有限の場合の話題を気にしたり, 振り返ったりする必要はありません.

## 8 線形代数について

- (1)  $y'' + 2y' + 3y = 0$ ,  $\lambda = -1 \pm \sqrt{2}i$ .

回答. 上のメモ書きがコメント欄に寄せられていました. これについて詳しくは線形微分方程式の単元で学びます. 物理の授業で既に扱っているとも思いますが, ここでは数学的な考え方をダイジェスト的に述べておきましょう (後期の講義内容の予告に相当します):

問題5(2)に現れた微分作用素に関する微分方程式

$$(D^2 + 2D + 3I)y = 0 \tag{8.1}$$

の解となる関数全体の集合 (これを解空間という) を  $V$  とする. 方程式 (8.1) は2階の微分まで現れていることから,  $V$  は2次元の線形空間になることが微分方程式の一般論により知られる. また, 各  $f \in V$  に対して  $D(f)$  も微分方程式 (8.1) を満たし (つまり  $D(f) \in V$ ), したがって  $D$  は  $V$  上の線形変換とみなせる. さて, 一般に, 線形変換  $F : V \rightarrow V$  について,  $V$  の各ベクトルは  $F$  の (広義) 固有ベクトルの線形結合で書けることが線形代数の理論により知られる. これを微分作用素  $D$  の場合に適用し, 線形変換  $D : V \rightarrow V$  の (広義) 固有ベクトルを求めよう.  $D$  の固有ベクトルは  $e^{\lambda x}$  なる形をしている<sup>4</sup>(ただし  $\lambda$  は定数). 関数  $e^{\lambda x}$  が方程式 (8.1) を満たすと仮定すれば,  $(\lambda^2 + 2\lambda + 3)e^{\lambda x} = 0$  が成り立つ. したがって  $\lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0$  でなければならず,  $\lambda = -1 \pm \sqrt{2}i$  である. これらの解を  $\lambda_1, \lambda_2$  とおこう. 既に述べたように,  $V$  の各元は, 固有ベクトルからなる基底  $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}$  の線形結合で書けるのであった. すなわち, 微分方程式 (8.1) の一般解は次で与えられる:

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}. \quad (\text{ただし } c_1, c_2 \text{ は任意の複素定数}) \tag{8.2}$$

さて,  $y(x)$  を実数変数  $x$  に関する関数と見なすとき,  $y(x)$  が実数に値を取るのはいつだろうか. 次ページの補題8.1によれば, それは  $c_2 = \bar{c}_1$  が成り立つときである. このとき, 実数  $\alpha, \beta$  を用いて  $c_1 = \alpha + \beta i$  と書けば, 補題8.1の証明における式 (8.3) により

$$y(x) = 2\alpha e^{-x} \cos(\sqrt{2}x) - 2\beta e^{-x} \sin(\sqrt{2}x)$$

<sup>4</sup> $D(y(x)) = \lambda y(x)$  を満たす関数とは, 微分方程式  $y'(x) = \lambda y(x)$  の解のことである. これは変数分離形の方程式であり, 解は簡単に求められる. 変数分離形の方程式の解説は参考書 p.159 にある.

となる.  $r_1 = 2\alpha$ ,  $r_2 = -2\beta$  として上式を改めて書き直せば,

$$y(x) = r_1 e^{-x} \cos(\sqrt{2}x) + r_2 e^{-x} \sin(\sqrt{2}x).$$

これが微分方程式 (8.1) の実数解としての一般解である (ただし  $r_1, r_2$  は任意の実数定数)<sup>5</sup>.

以上の事実を知っていると,  $e^{-x} \cos(\sqrt{2}x)$  は微分方程式 (8.1) の解の一つであることから, 問題 5(2) の答えが 0 になることは直ちに分かります.

**補題 8.1.**  $c_1, c_2$  および  $\lambda$  を複素数の定数とし,  $y(x) := c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{\bar{\lambda}x}$  とする. 関数  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  が実数値関数になるための必要十分条件は,  $c_2 = \bar{c}_1$ .

*Proof.*  $c_2 = \bar{c}_1$  を満たすときに  $y(x)$  が実数値関数となることは明らかである. 以下では,  $y(x)$  が実数値関数となるとき  $c_2 = \bar{c}_1$  となることを示す. 実数  $a, b, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$  を用いて  $\lambda, \bar{\lambda}, c_1, c_2$  を

$$\lambda = a + bi, \quad \bar{\lambda} = a - bi, \quad c_1 = \alpha_1 + \beta_1 i, \quad c_2 = \alpha_2 + \beta_2 i$$

とおく. オイラーの公式  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$  を用いて  $y(x)$  を三角関数に分解すれば,

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 e^{(a+bi)x} + c_2 e^{(a-bi)x} = c_1 e^{ax} e^{ibx} + c_2 e^{ax} e^{-ibx} \\ &= c_1 e^{ax} (\cos(bx) + i \sin(bx)) + c_2 e^{ax} (\cos(bx) - i \sin(bx)) \\ &= e^{ax} \left( (c_1 + c_2) \cos(bx) + (c_1 - c_2) i \sin(bx) \right) \\ &= e^{ax} \left( ((\alpha_1 + \alpha_2) + (\beta_1 + \beta_2) i) \cos(bx) + ((\alpha_1 - \alpha_2) + (\beta_1 - \beta_2) i) i \sin(bx) \right) \\ &= e^{ax} \left( ((\alpha_1 + \alpha_2) \cos(bx) - (\beta_1 - \beta_2) \sin(bx)) + i((\beta_1 + \beta_2) \cos(bx) + (\alpha_1 - \alpha_2) \sin(bx)) \right). \end{aligned}$$

したがって, 任意の実数  $x$  について  $y(x)$  が実数となるためには, その虚部

$$\operatorname{Im} y(x) = e^{ax} \left( (\beta_1 + \beta_2) \cos(bx) + (\alpha_1 - \alpha_2) \sin(bx) \right)$$

が常に 0 でなければならない.  $e^{ax} \neq 0$  より, これは

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\beta_1 + \beta_2) \cos(bx) + (\alpha_1 - \alpha_2) \sin(bx) = 0$$

を意味する. 関数空間において  $\cos(bx)$  と  $\sin(bx)$  は線形独立であることから,  $\beta_1 + \beta_2 = 0$ ,  $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$  を得る<sup>6</sup>. つまり,  $c_2 = \bar{c}_1$  である. また, このとき

$$y(x) = 2\alpha_1 e^{ax} \cos(bx) - 2\beta_1 e^{ax} \sin(bx) \tag{8.3}$$

□

- (2) すべての線形変換  $f$  に対して次がいえぬか: 基底が  $f$  で変換された座標系に固定された視点からは, 空間に固定されたベクトルは  $f^{-1}$  で移されて見える.

**回答.** その通りです. 例えば  $\mathbb{R}^n$  の基底  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  および線形同型  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  が与えられているとき, 基底  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  による基底  $f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)$  の変換行列 (各  $f(\mathbf{v}_i)$  を  $\mathbf{v}_i$  たちの線形結合で表示した際のスカラー係数の情報を並べたもの) を  $A$  とすれば,

$$[f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)] = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n] A. \tag{8.4}$$

<sup>5</sup>参考書 p.166 定理 7.2.4(2) の公式と同じ式である.

<sup>6</sup>例えば  $x = 0$  を代入することで  $\beta_1 + \beta_2 = 0$  を得る.  $x = \frac{\pi}{2b}$  を代入することで  $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$  を得る.

また,  $A$  は基底  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  に関する  $f$  の表現行列でもあります. 余談になりますが誤解がないよう補足すると, 上式に  $f$  をほどこすことで  $[f(f(\mathbf{v}_1)), \dots, f(f(\mathbf{v}_n))] = [f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)]A$  となることから<sup>7</sup>,  $A$  は基底  $f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)$  に関する  $f$  の表現行列でもあります. 一方, 式 (8.4) の両辺に右から  $A^{-1}$  をかけると

$$[f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)]A^{-1} = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n] \quad (8.5)$$

であり, この両辺に  $f^{-1}$  をほどこして両辺を入れ替えれば

$$[f^{-1}(\mathbf{v}_1), \dots, f^{-1}(\mathbf{v}_n)] = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n]A^{-1}.$$

つまり  $A^{-1}$  は基底  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  に関する  $f^{-1}$  の表現行列となります.

さて, 本題はここからで,  $\mathbb{R}^n$  の任意のベクトル  $\mathbf{a}$  の, 元の基底  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  による線形結合表示が  $\mathbf{a} = \sum_{i=1}^n r_i \mathbf{v}_i$  であるとしましょう. 問題は,  $\mathbf{a}$  を座標変換後の基底  $f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)$  の線形結合で表したときに, 各係数がどうなるかですが, 式 (8.5) より

$$\mathbf{a} = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n] \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \end{bmatrix} = [f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)]A^{-1} \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

つまり, 変換後の基底による  $\mathbf{a}$  の線形結合表示に現れる係数ベクトルは, 変換前の係数ベクトルに  $A^{-1}$  をほどこして得られるベクトルであり, これは  $f^{-1}$  に  $\mathbf{a}$  を代入して得られるベクトルの対応物ともみなせます<sup>8</sup>.

(3) 変換  $f$  と逆変換  $f^{-1}$  の表式が同じ形となるのは線形変換に限られるか.

回答. 限りません.  $\mathbb{R}$  上の全単射  $f$  において,  $f^{-1}$  のグラフは  $f$  のグラフと直線  $y = x$  を軸に線対称でした. したがって,  $f = f^{-1}$  を満たすためには  $f$  のグラフ自身が  $y = x$  を軸に線対称であればよい. 次はそのような線形でない  $f$  の例になります:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x & (x \geq 0 \text{ のとき}), \\ -2x & (x < 0 \text{ のとき}). \end{cases}$$

上の例は原点で微分可能ではありませんが, 微分可能性を求めたければ, 原点での傾きが  $-1$  になるような例を探せばよいでしょう.

## 9 複素関数について

この項目の内容についてより詳しく学びたい場合は, 複素解析あるいは複素関数論, 関数論などといった書名の本を参照してみるとよいでしょう.

(1)  $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$  を以下のようにして示しました. 曖昧さはどこまでならば許されるのでしょ

<sup>7</sup>詳しい証明は線形代数講義ノートの練習 25.3.2 をみよ.

<sup>8</sup> $f^{-1}(\mathbf{a}) = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n]A^{-1} \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \end{bmatrix}$  であることに注意せよ. とくに  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  が標準基底であれば  $[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n]$  は単位行列であり,

$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \end{bmatrix}$  より  $f^{-1}(\mathbf{a}) = A^{-1}\mathbf{a}$  である.



うか.

$$\begin{aligned}
 e^x \cdot e^y &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right) \left( \sum_{m=0}^{\infty} \frac{y^m}{m!} \right) = \left( 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots \right) \left( 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \cdots \right) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{x^m}{m!} \frac{y^{n-m}}{(n-m)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^n \frac{n!}{m!(n-m)!} x^m y^{n-m} \right) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^n {}_n C_m x^m y^{n-m} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = e^{x+y}.
 \end{aligned}$$

(注意: ここで1行目の最後から2行目への式変形で次を用いた: 非負整数の組  $(n, m)$  に対して, 1行目最後の展開項  $\frac{x^m}{m!} \frac{y^{n-m}}{(n-m)!}$  は一意的に定まる.)

回答. 問題は, やはり注意書きにある1行目の最後から2行目への変形にあります. 中学で学んだ式の展開とは, 括弧でくくられた式を括弧のない式に書き下すことでした. このとき, 展開前の式と展開後の式が等しいことの証明は分配法則を有限回用いることによってなされます. その証明はあくまで括弧内の式が有限和の場合のもので, 有限和で成り立つことが無限和でも直ちに成り立つと考えるわけにはいきませんから, したがって, 上では1行目最後にある極限値の積と, 2行目にある和の極限値が等しいことを説明する必要があります. 実際には無限和  $\sum_{n=0}^{\infty}$  の定義までさかのぼり, 次のように修正すればよいでしょう:

$A_n := \sum_{m=0}^n \frac{x^m}{m!}$ ,  $B_n := \sum_{m=0}^n \frac{y^m}{m!}$  と置けば,  $e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$  および  $e^y = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n$  であり, 資料2 命題 3.5(3) より  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n B_n = e^x \cdot e^y$  が成り立つ. ゆえに

$$\begin{aligned}
 e^x \cdot e^y &= \lim_{n \rightarrow \infty} A_n B_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \right) \left( 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \cdots + \frac{y^n}{n!} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^k \frac{x^m}{m!} \frac{y^{k-m}}{(k-m)!} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \sum_{m=0}^k \frac{k!}{m!(k-m)!} x^m y^{k-m} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \sum_{m=0}^k {}_k C_m x^m y^{k-m} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(x+y)^k}{k!} = e^{x+y}.
 \end{aligned}$$

(2)  $i^i$  について.  $z, w \in \mathbb{C}$  について,  $r, \theta \in \mathbb{R}$  を用いて  $z = e^r(\cos \theta + i \sin \theta)$  と表せるとき,  $z' := r + i\theta$  として

$$z^w = (e^r \cdot e^{i\theta})^w = (e^{r+i\theta})^w = e^{(r+i\theta)w} = e^{z'w}$$

となることが予想され, そこで

$$z^w := e^{z'w} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z'w)^n}{n!}$$

と定めるとよい気がする. この場合  $i^i = (e^{\frac{\pi}{2}i})^i = e^{\frac{\pi}{2}ii} = e^{-\frac{\pi}{2}}$  となる.

回答. 正解です. ただし, 上の定義では  $\theta$  の取り方が無数に考えられることに注意しなければなりません ( $\theta$  の代わりに  $\theta + 2\pi$  でもよい). 複素数における一般の冪は多価 (複数の値をとること) であるとされ, とくに  $-\pi < \theta \leq \pi$  に関する値 (つまり  $i^i$  における  $e^{-\frac{\pi}{2}}$  のこと) は主値と呼ばれています.

(3) 「 $f(z)$  が正則  $\iff f(z)$  が微分可能」か.

回答. 流儀によります. 複素数値関数  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  を, 実数値関数  $u(x, y), v(x, y)$  を用いて  $f(x + yi) = u(x, y) + iv(x, y)$  と書くとすれば,  $f$  は平面上の写像  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ( $g(x, y) := (u(x, y), v(x, y))$ ) であるとも見なせます. このとき, 次の五条件は同値になります:

(i)  $f$  は複素数値関数として微分可能. すなわち, 各  $a \in \mathbb{C}$  について極限  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  が存在する (ここで,  $h$  は複素数として 0 に収束する場合を考えている).

(ii)  $f$  は (i) の意味で微分可能かつ, 導関数  $f'(z)$  は連続である.

(iii)  $f$  は (i) の意味で何回でも微分可能である.

(iv)  $f$  は各点のある近傍において, 絶対収束する冪級数に展開できる.

(v)  $u, v$  は共に全微分可能であり, かつコーシー・リーマンの方程式を満たす.

(i) を微分可能の定義とし, (ii) あるいは (iii) を正則性の定義とすれば, 微分可能性と正則性は同値になります. また, 結局のところ上の五つが同値な条件であることから, これらのいずれかを満たす関数のことを正則関数の定義とする場合もあります.

(4)  $z = x + yi$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ) に対して,  $\partial_z = \partial_z(\frac{z+z^*}{2})\partial_x + \partial_z(\frac{z-z^*}{2i})\partial_y = (\partial_x - i\partial_y)/2$  としてよいか.

実部 (あるいは虚部) を与える写像は正則ではありませんから, それを  $z$  で微分することはできません. つまり, 中央の式における  $\partial_z(\frac{z+z^*}{2})$  は定義できず, 等式として結ぶことはできません. また, (3) における設定のもとで, (i)  $\Rightarrow$  (v) の証明から  $f'(z) = \partial_x(u+iv) = -i\partial_y(u+iv)$  となることが分かります (これは左辺と右辺が等しいことに相当する).

## 10 授業について

(1) 微積分の授業面白いです. / 授業は楽しかったです. / もっと数学が好きになりました. すべて微分できなかったのは許してください.

回答. 授業において最も重要なことは面白いかどうかではなく, 内容が充実しているかどうかにあります. また, 授業が面白くない, あるいは意味不明であるといったことが逆説的に教育効果を高めることがあります. 例えば, 先生の言うことがよく分からずに独学 (あるいは友達とのグループ学習) で学び対処することになれば, そうした経験が数学力の向上だけでなく, 主体的に知識を獲得する能力をも高めることになるでしょう. 授業は一種のプレゼンテーションではありますが, エンターテイメントのそれとは同列に語れないという問題がここにあります.

(2) 期末試験の問題 11 は「イカサマ 3 倍」のたとえ話を思い出しましたが, 楽しく頭を使うゲーム風な一方で今一つ納得しきれない何ともいえない感じが面白かったです.

回答. 「納得しきれない」という状況には様々な段階が考えられます. しかしいずれにせよ, 相手を納得せざるをえない立場に追い込むための強力な手段の一つとして証明があります. 例えば  $0.999\cdots = 1$  か? という問題を小学生に提示すれば, 賛否両論様々な意見が聞けることでしょう. どちらの意見も感覚的には同意できる部分があり, 彼等 (小学生たち) の中で結論をどちらか一方に収束させることは難しいかもしれません. こうした議論に決着をつけるために, 厳密な定義と証明が必要なのです.

(3) クロアチアの話がよかったです. / 旅の話は非常におもしろかったです. / 一度, 先生が海外へ行った期間の話, 面白かったです.

回答. 出張中の話題として紹介した講演スライドにあるとおり, この授業における論理記号の扱い方は世界共通であり, また研究レベルの数学の記述と同等であるということを頭の片隅に留めておきましょう. 高校数学をはるかに超えた所に来たことへの自覚と誇りを持って, 今後の学習に望んでもらえればと思っています.

(4) 夏休みにどこか旅行で行くことがあれば、またその話を後期におしえてください。

回答. 貧乏暇なしという言葉通りに忙しく、私的な旅行にはなかなか行けませんが、夏休み中は3件の出張がありました(名古屋・神奈川・京都).

(5) 授業内での問題練習が増えるとうれしいです。でも授業の進むスピードなどは丁度良いです!

回答. 扱うべき内容が非常に広いため、練習問題の時間がなかなか取れない状況にあります。その代わりに何を練習すべきかということは授業中に述べるつもりですので、試験勉強の際の参考にしてください。

(6) 授業ちゃんと出ればよかった。(来期からはちゃんとでます)

回答. 是非そうしてください。

(7) 資料9 Prop.2.2 にいきなりでてくる  $y$  がよく分からなかった。

回答.  $b_0$  をタイプミスで  $y$  と書いてしまいました。数名の方から同様の指摘を受けています。

(8) 単位を取るために効果的な勉強の仕方を教えて下さい。

回答. この授業に限ったことを言えば、試験では実際の講義で扱った内容について偏りなく幅広く出題しているつもりです。前期の内容は抽象的な部分が多く対策が難しかったかもしれませんが、後期ではやり方さえ分かれば解ける問題がメインになるでしょう。したがって対策も容易かと思えます。

(9) 早く試験が終わって遊びたいです。[顔文字]

回答. おおいに遊びましょう。ここ数年のところ、仕事が忙しいせいか私は何をして遊べばよいのか分からなくなってしまいました。もちろん、仕事が遊びというわけではありません。「趣味は〇〇です」といえるような何かが欲しいものです。

## 11 Tシャツについて

(1) 今まで授業のために買ったTシャツの総額っていくらくらいなんですか?

回答. 千円程度のものがほとんどであり、五千円を超えるものは少数です。そこから授業数を考慮し、逆算してください。

(2) というかプライベートでは着てるんですか?

回答. 着ます。ただし、誰にも会う予定がないとき(近所への買い出しも含む)は着ません。

(3) Tシャツの選び方のコツを教えてください。

回答. それは私が教えてもらいたい。ふだん服装に気を使わない人が洋服を買うのは、必要に迫られてのことだと思えます。その場合、気に入ったものが店になかったとしても仕方なく購入することになり、これでは物への愛着がわくことはありません。普段から購入目的を持たずに店に入るように心がけて、どうしても欲しいと感じたものだけを買うようにすれば、物を選ぶセンスや大切に作る心が育つのではないのでしょうか。

(4) ユニ○ロ・ユーザーです。おすすめのTシャツを教えてください。

回答. その人の人間性と同調しないデザインでは不釣り合いになってしまいますから、誰にでもおすすめというわけにはいかないのでは。

- (5) 面白 T シャツ 2 回同じのを着ていたことありましたよ! / 1 度 T シャツが初回とカブったときがありましたが, T シャツのネタがきれたんですか?

回答. 急いでおり, タンスから間違っ取りだしたのでした. なお, 通常の講義は年間 30 回のため, 一度も被らないようにすることも不可能ではありません. しかしながら, この講義は 60 回ありますから, 今後は何度も被ることでしょう.

## 12 その他の話題

- (1) 「数学解くガウス」を逆から読むとどうなるか.

回答. スウガク解学数.

- (2) 幸太郎先生の弟子になりたいです.

回答. その若さでここまでお世辞が言えるのであれば立派なものです. 長所はどんどん伸ばしましょう.

- (3) き〇この山とたけ〇この里ではどちらが好きですか.

回答. たけのこ派です. 幼少の頃は, きのこを買う人の神経が全く理解できませんでした.

- (4) 我々人類の存在意義があることを論理記号を用いて証明せよ.

回答. 思想家でも哲学者でもないことから真面目な返答はできかねます. そこで, ここでは数分で思いついた不真面目な回答を載せておきましょう. 皆さんも普段からこのような思考実験を繰り返して, 頭の体操をしてみることをおすすめします. 昼食の時間の会話のタネとして, 絶好の話題ではないでしょうか. 論理記号については割愛します.

人類に存在意義はあるか: 仮に存在意義がないことを確信してしまったとき, 私たちはいかに振る舞うことになるのだろうか. 例えば, 自暴自棄になった誰かが不幸な事件を起こすかもしれない. しかし, その事件を不幸とみなすということは, そこに何らかの価値を見出しているからこそ不幸であると考えてるのであり, 我々の確信は間違っていたことになってしまう. この例から示唆されるように何の意義をも現れないように振る舞うことは非常に難しく, 実際には不可能である. もし仮にそのような振る舞いが可能だったとしても, そのように何らかの方向へ強制しつつ行動するということは, その行為に意義を見出していることにほかならない. したがって, 我々が意義を認めずに実在することは不可能である.

- (5) 今の職業 (数学講師) についてどう思いますか?

回答. この職業には, 研究職であり教育職でもあるという, 内容が大きく異なるが, しかし無関係とはいえない二つの側面があり, この両方に職業的適正を見出すことは容易ではないと感じています. とくに数学の講義は, 必ずしも数学を志すとは限らない, いわば理系の全学生を対象にしているということもあり, 教育活動において研究者としての立場をどこまで押し出してよいか, という加減の調整が難しいです. 他方で, この職業の醍醐味は自由さにあると思います. 例えば, 教科書を無視して勝手気ままに講義内容を構成できる, という自由さに教育面での面白さを感じています (これは初等中等教育と大きく異なる点です). この自由さは, 思いのままに研究しているという研究活動の自由さから来るものと言えるでしょう. この職業は, 自由であること, 言い換えると自分で責任を取ることによって不安でない人に向けた職業といえるのではないのでしょうか. つまり, 自営業に近い部分があるということです.

- (a) きっかけは何ですか?

回答. 何も考えずにだらだらと大学で過ごしていたら, この職業以外に潰しが利かなくなってしまうのです. つまり, 人生設計をしっかりと考えていなかったというのが本音になります. 高校の職業適性検査の際には研究職へ適正があると診断されており, その方向に転がっても大きな問題はないだろうと高をくくっていたところもあります. もちろん誤解してはいけないこととして, この仕事は多くの資格職のように真面目に勉強すれば誰でも就けるというものではなく, スポーツ選手ほどではないにしてもそれなりの才能が求められる点に注意しなければなりません.

一方で, 当初は研究職に適正があると考えていたものの, ここ最近では, 教育職のほうにこそ適正があるのでは, とも感じています. その理由も, 大学でだらだらと過ごしていたことと関係があります. 確かな人生設計のうえで研究職に就いた勤勉家とは異なり, 私とはとにかく勉学には励みたくないというタイプの人間であり (これは恥ずかしいことではありますが), 勤勉家たちよりも受講生の気持ちに共感できる気がしてならないのです.

(b) なりたかった職なのですか?

回答. 以前にも申し上げた通り, 博士になりたかったのは, 少年期に 60 年代 TV アニメ<sup>9</sup>の影響を強く受けた私の父です. 父が私にほどこした家庭教育の中に, 父の憧れの職への想いがまったく無かったということは恐らくありえないでしょう. しかし, 私自身が研究職に憧れるということは特になく, 「博士号を取れ」と言われたことも一度もありませんでした. 既に父は他界しているため今となっては分かりませんが, もしかすると父が想定していた通りに導かれてしまったのかもしれませんが.

(c) 今の職でなかったら何に就いていたと思いますか?

回答. ネガティブな方向では, やるべき事を見つけられずにニートという可能性も十分にあります (今の職もこれと似たようなものです). ポジティブな方向としては, 何かのプロデューサーを目指して, どこかで丁稚奉公していたかもしれません. 自分自身でゼロから創造する仕事も魅力的ですが, 才能ある人の創造性を高める仕事にも同じくらい魅力を感じています.

(6) 先生の今後の人生計画を教えてください. (老後は縁側でゆっくり過ごしたいとか.)

回答. 上述の通り, これまで無計画だった人の計画を聞くのは野暮というものです. とはいえ, いま特に気になっていることを一つ挙げておきましょう. 数学という学問はとてつもないほどつまらないにも関わらず (そう考えている人は大勢います), 理系分野の人はみな学ばなければならないという現実, 非常に心を痛めています. 数学がつまらないのは何故か, そして一方で数学者が数学を面白いと感じるのは何故か, という議論を深めることで, 学問を志す人の多くが数学の講義をつまらないと思わずにすむような世界を実現したいものです. もちろん, この講義もその計画の一環であることは言うまでもありません.

(7) Facebook で調べた彼女との出会い, また告白の仕方, 断られ方等も是非ききたいです. / さしつかえなければ, もう少し先生の恋愛の話が聞きたいです.

回答. 男女の仲というのは往々にして後ろめたい何かがあるものです. おとぎ話のように清く正しく美しいなどということは滅多にないことであり, ふつうは公の場で語れるものではありません. せいぜい酒のつまみになる程度のものでしょう. ここでは差し支えない程度の話にとどめ, 詳しいことは皆さんが飲酒のできる年齢になり, また飲み会でご一緒する機会がありましたら, そのときにでも聞いてください.

<sup>9</sup>鉄腕アトム, 鉄人 28 号, エイトマンなど.

差し支えない程度の話: その女性に最初に出会ったのは大学2年目の新学期が始まってしばらく過ぎたころ、大学の宿舎に併設された銭湯に行った時のことでした。いつものように何人もの湯上りの若い女性と廊下ですれ違うなか、ひときわ美しい女性を見かけたのです。この世界にこれほど美しい人がいるのか、と驚くと同時に、彼女と同じ世界に私が実在していることを思うと根拠のない幸福感で酔いしれた感覚がいまでも忘れられません。その後、銭湯ではもちろんのこと、通学路や学生食堂、そしてエレベーターの中など学内でたびたびその女性を見かけるようになります。しかし、当時の私は面識のない女性に声をかけられるほどの人間力は持ち合わせておらず、彼女とすれ違うことをただ望むだけの凡庸な青年でしかありませんでした。そんな、遠くから眺めるだけの悶々とした日々が一年ほど続いていたある日、意外なきっかけで彼女と知り合うこととなります。その日の私は、課外活動としてこなしていたウェブサイトの更新のため視聴覚室で作業にふけていました。作業が落ち着いたころ、隣の席に誰かが腰を掛けたことに気づき、ふと流し目に見てみれば、くだんの女性が座っているではありませんか。彼女の見つめるディスプレイにはメールアドレスが表示されており…

続きは飲み会で。それと、Facebookは関係ありませんよ(勝手に想像されてませんか)。そして最後に男性諸君への助言として、湯けむり美人にはくれぐれもご注意ください。