経済・経営のための数学 a2 質問への回答

中間試験の自由記述欄に書き込まれた質問の一部について回答します. 感想等への対応は割愛しました.

- 授業で何をノートに取れば良いのか分からなかった. しかし, 大事な所をメモしないとテストで困ります. 全部ノートに書くべきでしょうか.

  全てを板書する時間がないのであれば, 教科書に書かれていないことだけをノートに書き取ることで時間を節約しましょう. 教科書に書いてあるかどうかを瞬時に判断できない人は, 事前に予習 (教科書に何が書いてあるのか読んでおく) を行っておけばよいのです.

- 後期に入って更に難しくなってなかなかついていくことができません. 普段の授業でもただ書いているだけで全く頭を働かせていないのでもう少し教科書レベルの問題を増やしてくれませんか?

  難しいことを学んでいる事に誇りを持ちましょう. せっかく大学に来ているのですから高度な内容を学ばなければもったいないと思いませんか? 教科書にある問題をすべて解説しているわけですから, これ以上同じレベルの練習問題を増やせば授業の進みが停滞してしまうことをご理解ください.

- 文系出身者も少なからずいるので, その層の人間でも理解できる難易度にして欲しい. また, 同様の理由から, 受講生に数学 III・C(またはそれ以上) の知識を要求しないで欲しい.

  数学 III・C の知識は要求しておりません. この授業は, 数学 III・C の知識を仮定せずに数学 III・C の単元を扱い, 更に大学数学についても一部取り上げるという内容になっています. また, 理学部で扱うような高度な技術については紹介だけにとどめ, 簡単な内容のみを扱うようにしています. これ以上内容を簡単にすれば大学で学ぶ意義が失われてしまいますので, 理解が深まっていないのであれば授業中の質問や自主学習などで補いましょう. 受験勉強を行っていたとき以上に予習復習をこなしていますか? それに本当は, 物事を理解することに文系理系の区別はないはずです. こういった固定観念は一刻も早く捨てましょう.

- この授業の数学は高校でやるレベルとどのくらい違いますか?

  三角関数の逆関数およびテイラーの定理と関連している部分以外は, すべて高校数学の範囲内です. 今回の中間試験で出題した問題も, 高校で行われる中間・期末試験よりも簡単な内容でした. それを持ち込み可で行っているということですから, ぬるま湯に浸かっていると考えましょう.

- 大学の授業は証明を中心に進んでいたので自分的にあまり理解できていない所が多かったので, もうちょっと問題をからめてほしいです.

  試験の成績をみれば分かるように基礎的な部分でつまずいている人が多いため, 応用問題を扱えば解き方は理解していないが答えだけは分かったつもりになる人が出ることでしょう. これが非常に危険なことであることは, ある経済理論の間違った解釈を続けたことが発端となって生じた最近の不況を見れば明らかです. 後々, 経済学専門の授業で微積分の応用はいくらでも出てきますので, その時に理解が深められるよう, いまは基礎力をつけることに努力を向けましょう.

- 数学と統計学の違いは何ですか?

  統計データ（実験・調査等によって実際に得られた情報）をどのように扱うべきかを考える学問を統計学と言います. 例えば, 統計学における推定・検定の理論を用いると, 実験における仮説の確かさ（例えば新薬の効能の有無など）や将来に起こり得る事象の可能性[1]について判定することができるのです. こうした考察には, 微積分の知識をはじめとして様々な数学の理論を利用します. その意味で, 統計学は数学の中の一分野, あるいは数学を応用する分野の総称である応用数学の一分野と呼べるでしょう. 小学校で学んだ算数の文章問題がすべて統計と関係があるわけではなかったように, 統計学との直接的な接点がない数学は無数にあります.

- 今後, 経済や経営を学んでいくうえで, この授業で学んでいる基本的な微積分も更に応用して使っていくことはあるのか?

  微積分を用いる機会は幾度もあるでしょう. 上で述べた統計学もその一つです. 例えば, 試験の得点が a 点以上 b 点以下の人の数や割合を計算するには, データを棒グラフにして棒グラフの面積を計算すれば良いのでした. これはある関数の定積分の計算に相当することにお気付きでしょうか. このことからも, 統計学の基礎に微積分が必要なことは容易に想像できます.

- 数学が社会に役に立っているという代表的な例があれば教えて下さい. 今ならっている微分積分がどの様に使われているのかもっと色々と知りたい.

  みなさんの周りにあるほとんどの工業製品には数学が用いられています. これらの開発に様々な科学・技術がふんだんに使われていることは疑いのないことです. そして, こうした科学・技術を理論的に記述する道具 (言葉) として数学が用いられています. 例えば, 物理学については道のり・速度・加速度の相互関係を数式で表すことから数学が使われていることをイメージしやすいでしょう. また, 様々な科学的実験のデータ処理に統計学が用いられることは既に述べた通りです. 数学の恩恵を受けているという直接的な感覚がないため, ありがたみを忘れてしまいがちですが, 現代生活を成り立たせるためには数学は必要不可欠なものなのです.

- 将来的に微積分の計算をしていく機会はあるのでしょうか. あるのならば, どのような時に使うのでしょうか.

  それはあなたの進路によるので何とも言えません. 例えば, 経済理論を詳しく理解しなければならない職業に就けば, 数学を使う機会はいくらでもあります. また, 金融関係の資格を取る場合, 試験の内容は経済学に関係があるものですから, 当然微積分を応用した理論を背景とする問題が出題されるはずです. ここで, この経済理論をどこまで深く理解しておくか, あるいは資格試験に合格できるだけの付け焼刃的な知識だけで甘んじるかの選択はあなた次第なのです. どちらを選択しても恐らく資格試験には合格できるでしょう. しかしながら, こうした選択の積み重ねがあなたの将来に, 陰に陽に影響することになるのです. 更に言えば, あなたの将来だけではありません. あなたのお子さんが高校で微積分を学ぶ際, 親のあなたが子供の勉強内容に理解を示しているか全くの無理解かの違いで, お子さんの学ぶ意欲にも差が出ることでしょう.

[1]身近なところでは, メディアの選挙速報における開票直後の当確判定は事前の出口調査等を用いた統計的考察によるものです.

- 塾講師をやっているのですが, 反比例のグラフを書かせる問題で x が整数点のときだけプロットしたものを正解と学校で教わっている生徒がいました. これってダメですよね?

  反比例関数の定義域が自然数の集合ならば上に述べたグラフは正解であり, 定義域が例えば正数全体ならば不正解となります.

- オイラーの多面体定理[2]とケーニヒスベルクのかけ橋[3]のように 2 次元・3 次元にかかわらずに成立するものがあるが, これらは ∞ 次元 (あるいは $-\infty$ 次元) でも成立するのか?

  多面体定理を無限次元の場合に適用しようとすると, 頂点の数, 辺の数, 面の数, 立体の数, 四次元立体の数⋯がすべて無限個になってしまい, 無限どうしの加減乗除を無限回繰り返す行為を考えることになり, 定理としては成り立ちません. 一筆書きの問題については, 1 次元のグラフは必ず 3 次元空間に埋め込めることが知られており, 3 次元の問題に帰着できます (したがって無限次元でも成立します). 負の数の次元については, 空集合を -1 次元とすることはあるものの, -2 次元や $-\infty$ 次元の空間を考察する数学は今のところありません.

- テイラーの定理は結局きちんとした値とかはでないのですか?

  平均値の定理やテイラーの定理は点の存在性を述べるものであり, 具体的にその点がどこにあるかの言及は定理の主張の中にはありませんでした. $y = x^2$ のような具体的な関数の場合, すべての点におけるグラフの接線の傾きがよく分かっていますから, 平均値の定理で存在が主張される点がどこにあるかも簡単に計算ができます. 一方で, 抽象性の高い関数になればなるほど, 点の位置を知ることは困難になっていきます.

- マクローリン級数というのは, 結局何を示そうとしているのかがいま一つ分かりません.

  関数を多項式で近似するという目的があります (これは授業でも述べました). 例えば, e^x の近似値を求めようと思った場合, 一見すると無理数の x 乗なので難しそうですが, 実際には次の多項式

  $$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

  に x の値を代入して計算します. また, 近似の精度を上げたければ, 自然数 n をできるだけ大きい値に取れば良いのです.

- n 次導関数を求めるのは, やはりヒラメキなんでしょうか? 数学の証明などで, たまに「どうしてその定理を使うの?」と思う事がある.

  一般的には, どうすればヒラメキが起きるのかを説明することはできません. 一部の天才がひらめいたことで得られた知識を, 我々凡人達がありがたく頂戴し (ただし知識を理解するには勉強が欠かせません), これを応用することで世の中に役立つ便利な物がたくさん生まれています. ヒラメキを生むために我々が出来ることとして, 天才が出てくる土壌を絶やさないようにすること, つまり教育や研究支援の質を保つことが挙げられます. こうした将来への投資が現代社会ではますます不可欠になると言えるでしょう.

---

[2]ちぎることなく連続的に球面に変形できるような多面体では, オイラー標数 (頂点の数 $-$ 辺の数 $+$ 面の数) が必ず 2 になります. 正多角形は全てこれを満たすので各自確認してみましょう.

[3]河川で区切られた都市ケーニヒスベルクの 7 つの橋を 2 度通過することなく全ての橋を渡り, スタート地点に戻って来ることができるか? という問題を数学の問題 (グラフ理論における一筆書き可能性) に帰着させることでオイラーは見事に解決しました.

- 数学の面白いところは? 数学教師になった理由?

  私個人への質問に回答すべきか迷いましたが…. 今まで想像もしなかった考えに出会ったり, 予想とは違う結論が得られたりするところが面白いと思います. しかしながら, これは数学に限った面白さではないことにお気付きでしょうか. 更に注目すべきことは, いま, 面白さ (interesting) に関する考察をしていたにもかかわらず, 芸人さんの話の面白さ (funny) にも上の理由が当てはまるということです. こうした面白さの一般論的考察を進めていった結果, 私の個人的な立場からすれば, 数学に限った何か特徴的な部分があり (例えば論理の厳密性など), それがあるから面白いという結論は得られませんでした.

  教育職についた理由は「“考える” とはどういうことか」 ということを多くの人に伝えたいと思ったからです. ただ, 学習指導要領のようなものに縛られるのは性分に合わなかったため, 現実的な教育の場は大学以外にありませんでした. ちなみに我が国で数学の研究職を志す場合, 教育活動という全く別種の業務がほぼもれなくついてくることになります.

- テスト前に類似問題プリントなどをもらえたら嬉しいです.

  今回出題した問題と類似の計算問題を期末試験で 60 点ぶん出題する予定です. 今回出題したものを類似問題プリントとしてご活用ください.

- 昼食後の授業なのでとても眠いです. 眠気の取れるオススメなものを教えてください.

  生理的な問題でもあるので難しいところです. 講義の内容に興味を持ち, 理解を深めたいと思うようになれば, 多少は眠気がなくなるかもしれません…と言いたいところではありますが, 学会の講演を寝むそうに聞いている研究者が大勢いることを考えれば, 興味だけで眠気を抑えるのは難しいのかもしれません.

  実は特効薬があるにはあるのです. ランダムで指名して問題を解かせて, 解けない者には厳しく叱責するという恐怖授業を毎回行えば, きっと皆さんの眠気も覚めることでしょう. しかし, このような手取り足取りの授業はせいぜい義務教育までであって, 大学の授業にはふさわしくないと私は考えています.

- 自由記述欄に書いたことを皆の前で読み上げることはしないで頂きたい.

  他人が考えていることを知ることは, 自分の思索を進めるうえで非常に参考になります. とくに大学というコミュニティーには, 同世代かつ知的レベルにも大きな差が無い集団であるという特徴があり, 隣に座っている友達がどこまで広く・深く考えているかを知れば, 自分の精神年齢が早熟か晩熟かの判断の指標にもなります. 周囲の人が自分よりもはるかに高度なことを考えているという状況に焦ったり, その逆で優越感を感じたりといった体験は皆さんの今後の成長のための貴重な材料になるでしょう. 以上のような教育的配慮から自由記述欄を公表しているのです. 実名まであげているわけではないのですから, あまり神経質にならないようにして下さい. なお, 今回はご希望通り読み上げは行わず, 文書にて紹介させて頂きました.

総合成績について

試験前から述べていた通り, 次のいずれかのうち高いほう

(1) (中間試験 [50 点満点] の得点) + (期末試験 [100 点満点] の得点÷ 2)

(2) 期末試験 [100 点満点] の得点

を基準点とし, 基準点に小テスト等の平常点を加味したものを最終成績の点数とします.