

大学で数学を学ばされる 1 年生へ

この文章は、もともと『線形代数学講義ノート』の序文に置かれていたものである。おもに数学を深く学ぶ予定のない学生に、「数学の学問的知識の世界がどのように広がっているか」を手っ取りばやく把握してもらうことを目的として書いたのであるが、そのような御託はいいから、なるべくはやく線形代数学の本題に入って欲しいとの要望を何度か受けて、ここに分離することにした。もはや「線形代数学の講義」のための文章ではなくなったため、その点を考慮して若干の修正と加筆をしている。

1 はじめに

理工系の学部に入學した大学 1 年生は、半ば強制的に微積分と線形代数を学ぶことになっている。これらを受講する 1 年生に向けて、微分積分学と線形代数学はどんな理論であり、そして学問全体 (あるいは大学における学び) の中で、それらがどういう位置を占めているかを説明しよう。そのためには次の二つの観点から眺めるのがよいように思う。

- (1) 大学教育における数学の役割
- (2) 微積分や線形代数と、数学の諸分野との関係

はじめに (1) について大学での学びとは何かを歴史的視点で振り返り、その後 (2) を論じる前提として、数学の分野がどのように大別されているかを見ていこう。すなわち、「微分積分学」「線形代数学」という言葉はいったん忘れて、数学という学問を俯瞰してみよう。

2 大学で学ぶということ

大学で学ぶとはどういう事か考えてみれば、そもそも大学とは何かという「大学論」を避けては通れない。すなわち、大学の歴史やその存在意義について問わねばならなくなる。そこで、西洋中世における大学がどんな機関であったのか少しだけ振り返っておこう。

大学とは何を学ぶ場所であったのだろうか。それは高度知識人になるための教養を学ぶ場であった。ここでいう「教養」とは何かという問いはこれまた難しいのだが、簡単にまとめれば、物事の在り方を正確に把握し適切な判断を下すための分析力と行動力のことを指す。したがって教養とは広い知識だけをいうのではなく、それを活用する能力のことも含んでいる。そして、大学で教養を修めた者は、次に専門職教育機関 (大学院¹) で専門課程を学び、それ

¹大学院は professional school および graduate school の和訳に相当し、ここでは professional school を指す。

ぞれの職業に就くのである。教養が必要とされる専門職は当初は神学・法学・医学に関するものが主であった。のちに社会が専門化・多様化したことにより、様々な職業において高度な知識人が求められるようになり、教養を必要とする者の多くが大学に足を運んだのである。大学とは、どのような職に就くにせよ必要となる基礎学力を身につける場であると見なされていた。

なお、中世の教養教育はリベラル・アーツあるいは自由七科とも呼ばれる。ここで自由という言葉には、偏見なく自らの判断で物事を見定めることができるという意味が込められている。また、七科とは具体的な学科のことであり、言語に関わる三学（文法・論理・修辞）と数理科学に関わる四科（算術・幾何・天文・音楽）を指す。これらの教養を身につけていることが当時の知識人のあいだの常識であった。

3 数学教育の役割

自由七科のうち半分が数学的な学科であった事情を検討しよう²。教養教育の目的は先に述べた通りであり、その中でも特に基盤となる力が論理的思考力である。そして、この能力を獲得する一つの指針を与えるものとして数学が尊重されていた。その背景には、あまたある学問の中でも特に厳密性が高い理論であると数学がみなされ、論理展開のモデルとなったという事情がある。もちろん、数学以外の学科を学ぶことでも論理的思考力を高めることはできる。しかしながら数学では、余分な情報を落として単純化した問題を扱う傾向が強いことから、論理によって決着がつく様子を初学者が把握しやすいという側面がある。ここに教育的効果における数学の優位性があり、論証の方法論を学ぼうと思えば数学はうってつけの学問といえる。この事情は現代においても同じであり、教養としての数学に確かな価値が認められている。

一方で、科学が発達した近代以降においては、その技術的側面からも数学を学ぶ必要が生じている。科学の多くは数学を用いて表現されるため、サイエンスの言語としてまず学ばねばならない学科となったのである。もちろん、将来専攻する分野によっては、数式を活用する機会は少ないという人もいるだろう。それでも実験やアンケート調査といった観測を行う分野を専攻するのであれば、観測結果にどの程度の信憑性があるかを知るために少なくとも統計学を学ぶ必要がある。自然科学系のどの専門学科に進むにせよ学ぶべき基礎学科であるという数学の立場は、中世における教養教育の役割を彷彿させるものがある。

²あるいは修辞学を除く六科目すべてが数学的とも考えられる。

4 現代の大学における数学の授業

かつての大学では、自由七科に含まれる部分についての数学が学ばれていた。ここで視点を現代に戻し、これから大学で学ぶことになる数学に話を向けよう。現代においても大学生に教えるべき数学内容の共通見解が得られており、したがって、どこの大学に行っても誰が教えても殆ど同じ内容が扱われることになる。そして、多くの講義は学習の効率性の名のもとでパッケージ化されている。単位認定の基準を与える上で、ある程度のパッケージ化はやむを得ない。しかしながら、特に理工系学科の1年次生向けの講義についてそれは顕著であり、ほとんどの大学において、微積分学(解析学の初歩)と線形代数学(行列と行列式の理論)を二つの柱とした初年度カリキュラムが組まれている。

個人的見解ではあるが、こうしたパッケージ化には次のような功罪があるように思う:

- (功) パッケージされた部分に限れば、そこで述べられる内容は完成しきった理論と見なせる。これは、本に書いてあることを書き写すだけでも講義として成立することを意味し、これにより担当の講師は別の仕事に多くの時間を割くことができるようになった。また、扱うべき内容が決まっていることから参考書を書く側の工夫としては、いかにして読者の用途に応じるかを重視するようになり、数学書の様々な差別化が図られることになる。実際、講義用のものや自習に適したもの、あるいは分かりやすさに特化したものなど多種多様な要請に応じた参考書が数多く出版されており、学習する側の環境はこの上なく整っている。
- (罪) 一度パッケージ化されると担当講師はノルマの消化のみを念頭に授業を進めがちになり、そのため広い視野を持って論ずる機会は失われやすい。そうなれば内容が縦割りになり、本来は有機的な繋がりを持つ各分野がそれぞれ独立・分断されたものであるかのように受講者は感じてしまう。また、パッケージ化された教育が長い間続くと、下手をすれば、それらを学ぶべきことは理由なく当然であるといった錯覚に陥ってしまう可能性がある。これはある種の思考停止であり、思考停止してしまえば学問の意義が問われることはない。これでは社会の変化に応じた数学教育は行えないし、あるいは学生の学習意欲の低下に繋がることもあるだろう。

上のような事情を踏まえて、数学を教える側・学ぶ側の双方が次のような点を意識できるとよいと思う。

- この分野を何故学ぶのか、あるいは必修科目であるべきなのかを改めて考える。
- テクニカルタームを定義する際には、どうして新しい概念を導入するのか、というそもそも論を軽視しない。

- シラバスの内容の外にある分野との関係について考える。

5 数学概観

数学における微積分学と線形代数学の位置を知るために、ここで数学の各分野について簡単に触れておこう。伝統的には、数学は代数・解析・幾何の三分野に大別される。もちろん、これは大まかな分類であり、数学の各分野はすべてこのいずれかに属するというわけではない。むしろ数学は、この三分野の考え方を駆使して、分野に囚われることなく縦横無尽に研究されていると考えたほうがよい。これから三分野の簡単な説明を与えるが、ここで述べていることは、未定義語の羅列のせいで予備知識に乏しい初学者には想像しにくい部分もあるだろう。しかしながら、数学をある程度学び終えた後でもう一度読めば³、より進んだ理解が得られるはずである。

代数 代数学とは、簡単に説明すれば四則演算の技法を高める学問のことである。例えば小中学校で学んだ計算練習などがこれに相当する。しかしながら、このような解説は、説明を放棄したいときの逃げ口上であって代数学の本質をつくものではない。代数学の神髄は、二つの異なる世界を一つの見方で繋げることにあると言えるだろう⁴。さて、代数学の中には数論・群論・体論・環論などがある。数論は素数の性質を調べる分野で、最大公約数や最小公倍数の問題を扱った経験のある一般の人にとって最もなじみある数学である。群論とは、図形をはじめとする様々な数学的構造の対称性を研究する分野であり、体論とは四則演算が成立する世界をいくつも考えだし、それらの間にある関係を群論を通して調べるものである。環論の説明を予備知識なしに述べるのは難しい。しかし、線形代数学がこれら四分野のどこに入るかあえて問うてみれば、環論に属するというのが答えである。

解析 高校で学んだ微分や積分などに現れる極限操作を扱う数学を解析学という。もちろん複素数の範囲も含めた関数の解析も扱われる(関数論)。自然科学の法則(物理法則だけとは限らない)を記述する式の多くは微分積分の記号を用いて表され、これらは微分(積分)方程式と呼ばれる。こうした方程式の解を探す手法や、解が満たす性質を研究することが解析学の主な目的であり、したがって実用的な諸科学と最も関係の深い分野とも言えるだろう。解析学において厳密な論理展開を行うには ε - δ 論法の会得はもちろんのこと、関数の列に関する収束・発散の精緻な議論

³この文章は、将来的に深い数学を学ぶ予定のない理工系の学生を対象読者として想定している。したがって、ここでいう「数学をある程度学び終えた後」とは、大学1年次の必修授業を学び終えた時点のことを指す。もちろん、大学生に相応しいレベルのまともな授業を受けられなかった場合は、進んだ理解を得るために少し自習する必要があるだろう。

⁴例えば線形代数学においては、 \mathbb{R}^n から \mathbb{R}^m への線形写像全体と、 $m \times n$ 行列全体が1対1に対応することを通して、線形写像の分析を行列計算に帰着させる手法を学ぶ。

(関数解析学) が必須であり, そのための基礎としてルベーグ積分というキーワードがあることを覚えておくとよい. また積分論は, 統計学の基礎となる確率論 (大数の法則や中心極限定理) とも深い関わりを持っている.

幾何 空間図形を扱う数学を幾何学といい, 現代の幾何学は微分幾何学と位相幾何学 (トポロジー) に大別されている. 前者は面積や体積など量的な調べかたを下地にした幾何学であり, 後者は図形の持っている性質の違いに着目する幾何学である. 図形の性質とは, 例えば円上の 1 点を切り離してもまだ繋がったままだが, 線分で同じことを考えると二つに分離されてしまうといった具合である. いずれの幾何学も多様体の構造を調べることが念頭にある. 大航海時代以前の人々は, 世界の形が平らで海が無限に広がっているのか, それとも球の形をしているか, あるいは第三の可能性はあるか (例えばドーナツ型など) という問題に挑むには, 限られた観測結果と頭の中の想像を頼りに結論づけるしかなかった. 多様体論とはこれの多次元版に相当する. つまり, 宇宙の形の可能性について追求する数学である.

いま挙げた分野は数学の一部であり, ここにすべてが列挙されたわけではない. 例えば複数の分野にまたがる数学 (応用数学を含む) については何一つ述べていない. このほか, 数学それ自体を問う分野もある. その一つは数学の歴史を紐解く数学史に関する分野であり, もう一つは数学における証明の厳密性や正当性について論じる数学基礎論 (数理論理学) である.

最後に, 大学初年度に学ぶ微分積分学と線形代数学について述べておく. これらが理工系分野で求められる基本的な素養の一つといえるかどうか, 読者自身で検討されることを望む.

微分積分 微分とは曲線の傾きのことを指す. これは局所的な変化量を意味しており, 微分法では傾きの分析を通して物事の変化を捉える手法が論じられる. 一方, 積分 (定積分) は図形の面積や体積に相当する概念である. 細かく切り分けた図形の面積を足し合わせることで求積したように, 積分法では情報の集積や総合の仕方が扱われる. 一見すると, 微分と積分は全く関係のない概念のように思えるものの, これらは微分積分学の基本定理を通して関連付けられている. 歴史的視点で振り返れば, ニュートンによる力学への導入によって微分積分学が今日の形で確立され, 様々な物理法則を方程式を通して説明することが可能になった. しかし, 変化を記述したり情報を集積・総合したりする行為は物理学だけの専売特許ではない. これらは人間が行う分析・考察において基本的であり, したがって, 微積分の手法は多様な分野に応用できる可能性を秘めている.

線形代数 線形写像 (線形関数) を分析するための理論を線形代数学という. 線形写像とは, 大雑把にいえば比例概念の多変数化に相当し, ゆえに線形写

像は定数関数の次に単純な関数といえる。自然科学が、自然界の現象を出来る限り単純なモデルに落として分析する学問であるとするならば、定数関数の次に単純な構造を持つ線形関数がそこで大きな役割を果たすであろうことは想像に難くない。そして事実、我々人間が考える数学的対象の多くに線形性が潜んでいるのである。

冒頭で述べた『線形代数学講義ノート』では、線形代数で学ぶ各単元の解説の中で上述の未定義語の定義や線形代数との関連等が説明され、伏線として回収される予定であった。言い換えれば、線形代数の名のもとに、数学の概観を試みようとしていたのである。

6 おわりに

以上、大学1年生が数学を学ぶ意義について述べた。たとえその意義が明確になろうとも、それが当人の学習意欲を促進させるかといえば、それはまた別の話である。むしろ、興味がないにもかかわらず学ぶ必要性が見えてくれば見えるほどに、学習意欲が減退する場合もありうる。もしかすると、まずは興味があって将来深く学びたいと考えている分野についてあらかじめ予習をしておき、それとの関連として必修の数学を学ぶ、という姿勢が望ましいのかもしれない。そして、興味ある分野と数学との間に関連のある可能性がかなり高いことは、既に述べてきた通りである。