定積分の試練

担当： 嶺 幸太郎

※本冊子において，『本』 とは

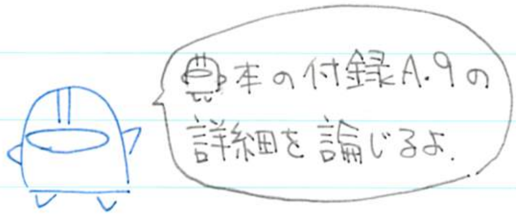
『微分積分学の試練』（日本評論社）のことを指します．

関数の積分可能性

Point 面積を計算するために、細かく切り分けた短冊について考えたい。そのために区間を細かく分割していく。

§ 閉区間の分割

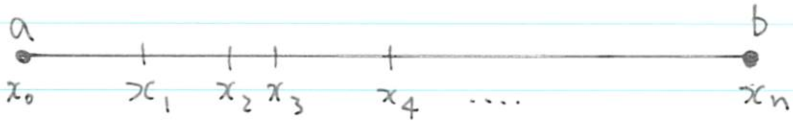
$X=[a,b]$ $(a<b)$ とする。



Def Xに含まれる1点集合でない閉区間たち $A_1,\dots,A_n$ がそれぞれの端点以外で交わらず、

$X=\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ となるとき、部分集合族 $\Delta=\{A_1,\dots,A_n\}$ を X の分割という。

例



$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$, $A_i=[x_{i-1},x_i]$ とすれば

$\Delta=\{A_1,\dots,A_n\}$ は X の分割である。以下、Xの分割はこのように表示されている

として話を進める。

Xの分割たち全体を集めた集合を $\mathbb{P}$ とする。(この講義でのみ通じる記号)

Def 分割 $\Delta=\{A_1,\dots,A_n\}$ $(A_k=[x_{k-1},x_k],\ a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b)$

に対して、各A_iの幅の最大値

$$|\Delta| := \max\{x_k-x_{k-1} \mid k=1,\cdots,n\}$$

を Δの幅という。(mesh Δ とも書く。)

Def $\Delta_1,\Delta_2\in\mathbb{P}$ が次をみたすとき、Δ_1はΔ_2より細かい(あるいは、

Δ_1はΔ_2の細分である)という。

$$\boxed{\forall A\in\Delta_1,\quad \exists B\in\Delta_2 \quad \text{s.t.} \quad A\subset B}$$

Fact Δ_1がΔ_2より細かいとき、$|\Delta_1|\le|\Delta_2|$

§積分可能性

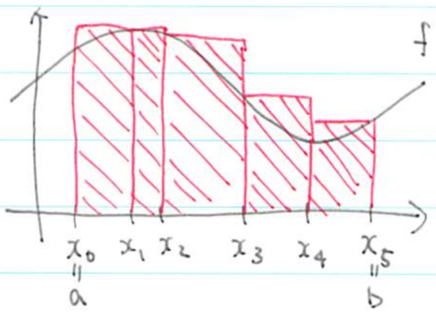
$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ を有界な関数とする.
f の定積分（積分可能性）を定めよう.

$\Delta = \{A_1, \cdots, A_n\} \in \mathbb{P}$ $(A_i = [x_{i-1}, x_i],\ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b)$ とする.

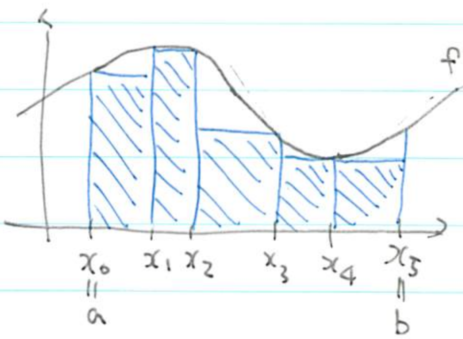
$m_i := \inf f(A_i)$, $M_i := \sup f(A_i)$ とおく.

ダルブー和 $S(f,\Delta)$ および $s(f,\Delta)$ を次で定める.
（$f \geqq 0$ の場合、これは図にある短冊の面積の和に相当する.）

$$S(f,\Delta) := \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1}), \qquad s(f,\Delta) := \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$$



上ダルブー和



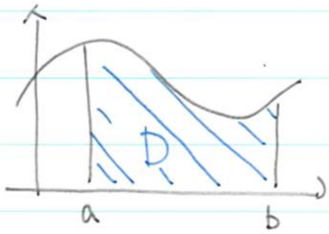
下ダルブー和

このとき. $m_i \leqq M_i$ より. $\quad s(f,\Delta) \leqq S(f,\Delta)$

$S(f) := \inf\{S(f,\Delta) \mid \Delta \in \mathbb{P}\}$, $\quad s(f) := \sup\{s(f,\Delta) \mid \Delta \in \mathbb{P}\}$

上ダルブー積分 　　　　下ダルブー積分

仮に、図形



の面積が定まるとすれば、

$s(f,\Delta) \le$ Dの面積 $\le \mathcal{S}(f,\Delta)$ であるから、

$s(f) \le$ Dの面積 $\le \mathcal{S}(f)$ となるであろう。

しかし、一般には、Dに面積が定まるとは限らない。実は、次が示せる。

Fact $\quad {}^{\forall}\Delta_1, \Delta_2 \in P \quad s(f,\Delta_1) \le \mathcal{S}(f,\Delta_2)$

（証明は次ページを見よ。）

ゆえに Δ_2 を固定し、Δ_1 のみを動かして sup を取れば、$s(f) \le \mathcal{S}(f,\Delta_2)$。
更に Δ_2 を動かし inf を取れば、$s(f) \le \mathcal{S}(f)$ を得る。

Def $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ が $s(f)=\mathcal{S}(f)$ を満たすとき、f は閉区間 $[a,b]$ 上で積分可能である（あるいは可積分である）という。この一致する値を f の定積分（リーマン積分）と呼び、これを

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

と書く。

目標 連続関数が積分可能であることを理解する。

積分可能でない例 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ を

$$f(x)=\begin{cases} +1 & x\in\mathbb{Q} \\ -1 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

と定めると、各 $\Delta=\{A_1,\dots,A_n\}\in P$ について、

各 A_i が有理数および無理数を含むことから、

$m_i = \inf f(A_i) = -1 \qquad M_i = \sup f(A_i) = 1$

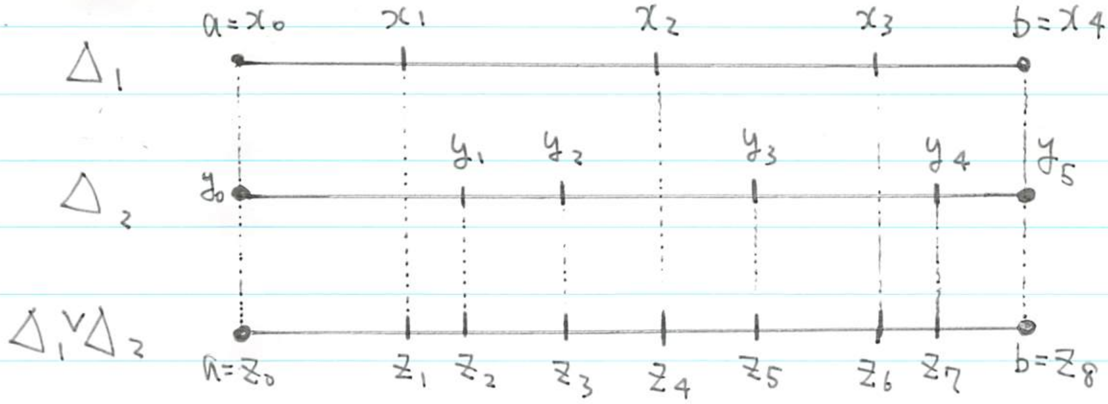
$\therefore\ s(f,\Delta)=-1,\ \mathcal{S}(f,\Delta)=1$。ゆえに $s(f)=-1\neq 1=\mathcal{S}(f)$。

§分割の細分

$X=[a,b]$ $(a<b)$: 閉区間. $\mathcal{P}$: Xの分割全体.

2つの分割 $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{P}$ に対して, これらに現れる区間の端点をすべて小さい順に並べることによって, さらに細いXの分割を得ることができる.
これを Δ_1とΔ_2の共通細分とよび, $\Delta_1 \vee \Delta_2$ とかく.

例



細分の形式的定義は $\Delta_1 \vee \Delta_2 := \{A \cap B \mid A \in \Delta_1, B \in \Delta_2\} \setminus$ (Xの1点以下の集合全体)

Δを細かくすればするほど $S(f,\Delta)$ は小さくなることから

$$S(f, \Delta_1 \vee \Delta_2) \leq \min\{S(f,\Delta_1), S(f,\Delta_2)\}.$$

同様の理由により. $s(f, \Delta_1 \vee \Delta_2) \geq \max\{s(f,\Delta_1), s(f,\Delta_2)\}$. したがって

Fact (再掲) $\forall \Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{P}$, $s(f,\Delta_1) \leq S(f,\Delta_2)$

proof

$$s(f,\Delta_1) \leq s(f,\Delta_1 \vee \Delta_2) \leq S(f,\Delta_1 \vee \Delta_2) \leq S(f,\Delta_2) \quad \square$$

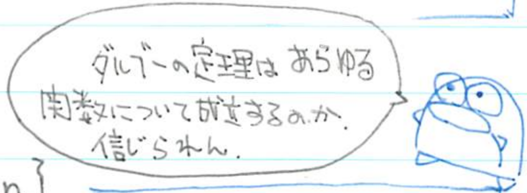
§ダルブーの定理. $X=[a,b]$, $f:X\to\mathbb{R}$ は有界であるとする.

ダルブー和 $S(f)$, $s(f)$ を求めるには, 細分 $\Delta\in P$ を P全体を動かして上限や下限をとる必要があった. 実は, その様な面倒なことは不要であり, $|\Delta_n|\xrightarrow{n\to\infty}0$ なる列 $\Delta_n\in P$ を1つ取り, これについてのみ論じればよいことを 次の定理は主張している.

Thm (ダルブー) $\Delta_n\in P$, $|\Delta_n|\to 0$ $(n\to\infty)$ とする. このとき

(1) $S(f)=\lim\limits_{n\to\infty} S(f,\Delta_n)$, (2) $s(f)=\lim\limits_{n\to\infty} s(f,\Delta_n)$

この証明には, 次の補題を用いる.



Lem $\Delta_0=\{A_1,\cdots,A_{n_0}\}\in P$, $\delta_0=\min\{A_i\text{の幅}\mid i=1,\cdots,n_0\}$

$M:=\sup f(X)$, $m:=\inf f(X)$ とし, $\Delta\in P$ が $|\Delta|\le\frac{1}{2}\delta_0$ を満たすならば

(1) $S(f,\Delta)-S(f,\Delta\vee\Delta_0)\le(M-m)(n_0-1)|\Delta|$

(2) $s(f,\Delta\vee\Delta_0)-s(f,\Delta)\le(M-m)(n_0-1)|\Delta|$

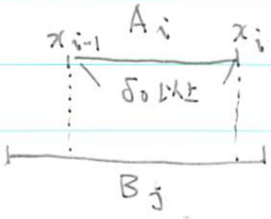
proof of Lem (1)のみ示す. ((2)も類似の手法により示される).

$\Delta_0=\{A_1,\cdots,A_{n_0}\}$, $A_i=[x_{i-1},x_i]$, $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n_0}=b$

$\Delta=\{B_1,\cdots,B_n\}$, $B_j=[y_{j-1},y_j]$, $a=y_0<y_1<\cdots<y_n=b$ とする.

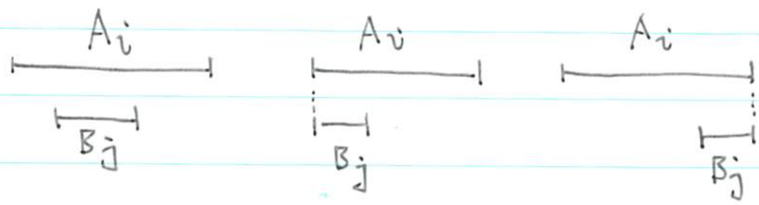
各 $A_i\in\Delta_0$, $B_j\in\Delta$ に対して, A_iの幅は δ_0 以上, B_jの幅は $\frac{\delta_0}{2}$ 以下だから,
B_j は $x_0,\cdots,x_{n_0}$ のうち 1つだけを内部に含むか, 内部に全く含まないかの いずれかである.
(補足 閉区間 $[\alpha,\beta]$ に対して, その内部とは 開区間 (α,β) のこと)

注 $x_0,\cdots,x_{n_0}$ のうち 2点以上が 1つの B_j に含まれることはない. 仮に 2点を含むとすると

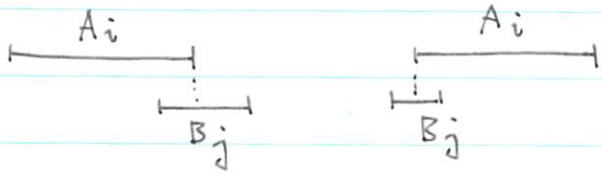


左図のようになり, これは $|\Delta|\le\delta_0/2$ に反する.

例 **Case I** (含まない場合)



Case II (に含む場合)

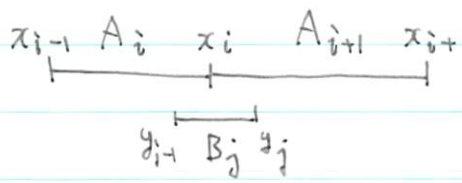


(注 $x_0, \dots, x_{n_0}$ のうち, B_j の内部に含まれる可能性があるのは $x_1, \dots, x_{n_0-1}$ の n_0-1 個の点である)

Case I B_j が内部に $x_0, \dots, x_{n_0}$ のいずれも含まないとき.

$B_j \subset A_{i_0}$ なる $A_{i_0} \in \Delta_0$ をとれば, $B_j = B_j \cap A_{i_0} \in \Delta \vee \Delta_0$ となる.

ゆえに, $M_j = \sup f(B_j)$ とすれば, $M_j(y_j - y_{j-1})$ なる項が, $S(f,\Delta)$ の総和の項にも $S(f, \Delta \vee \Delta_0)$ の総和の項にも現れる. したがって, 示すべき式(1)の左辺における差において, これらの項は相殺されて消える.



Case II B_j が内部に $x_1, \dots, x_{n_0-1}$ のうちの1つ x_i を含むとき.

区間 B_j は, 分割 $\Delta \vee \Delta_0$ においては次の2つの区間

$C_1 = [y_{j-1}, x_i]$, $C_2 = [x_i, y_j]$ に分かれる.

示すべき式(1)の左辺について, $S(f,\Delta)$ の総和における B_j に関する項と, $S(f, \Delta \vee \Delta_0)$ における C_1 と C_2 に関する項の差は, 次のように見積もることができる:

$M_j = \sup f(B_j)$, $L_1 = \sup f(C_1)$, $L_2 = \sup f(C_2)$ とおくと, $M \geqq M_j \geqq L_1, L_2 \geqq m$.

$$M_j(y_j - y_{j-1}) - \left(L_1(x_i - y_{j-1}) + L_2(y_j - x_i)\right)$$

$$\leqq M(y_j - y_{j-1}) - \left(m(x_i - y_{j-1}) + m(y_j - x_i)\right) = (M-m)(y_j - y_{j-1})$$

$$\leqq (M-m)|\Delta|.$$

Case II がおこりうるのは n_0-1 コの点 $x_1, \dots, x_{n_0-1}$ を B_j たちが含む場合に限られるから, 結局,

$$S(f,\Delta) - S(f, \Delta \vee \Delta_0) \leqq \sum_{\text{Case II}} (M-m)|\Delta| \leqq (M-m)(n_0-1)|\Delta|$$

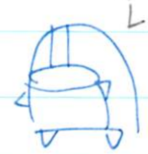
(高々 n_0-1 個の和) □

ダルブーのThmの証明

(1) のみ示す. $^\forall \varepsilon > 0$ を固定する.

$S(f)$ は集合 $H = \{ S(f, \Delta) \mid \Delta \in P \}$ の最大の下界ゆえ.
これより大きい数 $S(f) + \varepsilon/2$ は H の下界ではない.

ここでのギロンと似た論法が曲線の単元に登場するよ.



[復習 x が H の下界 $\overset{\text{def}}{\iff}$ $^\forall h \in H,\ x \leq h$.
x が H の下界でない $\iff$ $^\exists h \in H\ \ x > h$.]

よって. $\underline{S(f, \Delta_0) < S(f) + \varepsilon/2}$ ☆ をみたす $\Delta_0 \in P$ が取れる.

$\Delta_0 = \{A_1, \cdots, A_{n_0}\}$ とし. $\delta_0 > 0$, $M, m \geq 0$ を前Lemの通りに定める. さらに,

$$\delta := \min\left\{ \frac{\varepsilon}{2(M-m)(n_0-1)},\ \frac{\delta_0}{2} \right\} \text{ とおく.}$$

注 f は定数関数でないとする. つまり $M > m$. また $n_0 \geq 2$ とする.

$|\Delta_n| \xrightarrow{n \to \infty} 0$ より $\underline{^\exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n > N \Rightarrow |\Delta_n| < \delta.}$ ☆☆

このとき, $\boxed{n \geq N \Rightarrow |S(f, \Delta_n) - S(f)| < \varepsilon}$ が次のようにして示される.

$n \geq N$ とすると ☆☆ より $|\Delta_n| < \delta \leq \frac{\delta_0}{2}$ である. つまり, 前Lemが適用できて,

$$\begin{aligned}
S(f, \Delta_n) &\leq S(f, \Delta_n \vee \Delta_0) + (M-m)(n_0-1)|\Delta_n| \\
&< S(f, \Delta_0) + (M-m)(n_0-1) \cdot \frac{\varepsilon}{2(M-m)(n_0-1)} \\
&< \underbrace{S(f) + \varepsilon/2}_{☆より} + \varepsilon/2 = S(f) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

$$\therefore\ 0 \leq S(f, \Delta_n) - S(f) < \varepsilon \qquad \square$$

Thm (区分求積法) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ が積分可能であるとする.

$\Delta_k=\{A_1^k,\cdots,A_{n_k}^k\}\in\mathcal{P}$, $|\Delta_k|\xrightarrow[k\to\infty]{}0$ とする.

ここで各 $A_i^k=[x_{i-1}^k,x_i^k]$ $(i=1,\cdots,n_k)$ において $\xi_i^k\in A_i^k$ をとっておく.

このとき, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{n_k}f(\xi_i^k)(x_i^k-x_{i-1}^k)$

proof $m_i^k=\inf f(A_i^k)$, $M_i^k=\sup f(A_i^k)$ とおくと.

$$m_i^k\le f(\xi_i^k)\le M_i^k \quad \text{であるから}$$

$$s(f,\Delta_k)=\sum_{i=1}^{n_k}m_i^k(x_i^k-x_{i-1}^k)\le\sum_{i=1}^{n_k}f(\xi_i^k)(x_i^k-x_{i-1}^k)\le\sum_{i=1}^{n_k}M_i^k(x_i^k-x_{i-1}^k)=S(f,\Delta_k)$$

ダルブーのThmより $s(f,\Delta_k)\xrightarrow{k\to\infty}s(f)$, $S(f,\Delta_k)\xrightarrow{k\to\infty}S(f)$.

また, 積分可能性より $s(f)=S(f)$.

ゆえに, はさみうちの原理から求めるべき式を得る. □

発展 "$\displaystyle\lim_{|\Delta|\to0}S(f,\Delta)=\alpha$" を次を満たすことと定義する:

$$\boxed{\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0\ \text{s.t.}\ \ \Delta\in\mathcal{P}\text{ かつ }|\Delta|<\delta\ \Rightarrow\ |S(f,\Delta)-\alpha|<\varepsilon}$$

ダルブーのThmの証明と同様の論法で, $\displaystyle\lim_{|\Delta|\to0}S(f,\Delta)=S(f)$ を示すことができる.

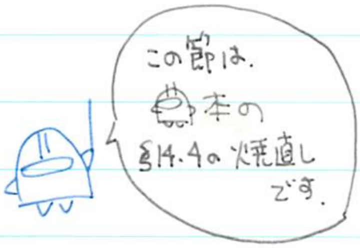
次も上と同様にして示すことができる. $\displaystyle\lim_{|\Delta|\to0}s(f,\Delta)=s(f)$

Thm

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{|\Delta|\to0}\sum_{i=1}^{n_\Delta}f(c_i^\Delta)(x_i^\Delta-x_{i-1}^\Delta).$$

ただし, $\Delta=\{A_1^\Delta,\cdots,A_{n_\Delta}^\Delta\}$, $A_i^\Delta=[x_{i-1}^\Delta,x_i^\Delta]$, $a=x_0^\Delta<x_1^\Delta<\cdots<x_{n_\Delta}^\Delta=b$, $c_i^\Delta\in A_i^\Delta$ とする.

§ 連続関数の積分可能性　(X,d), (Y,ρ)：距離空間.



Def　$f: X \to Y$ が次をみたすとき **一様連続である** という.

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{s.t.} \quad \forall a, b \in X, \quad d(a,b) < \delta \Rightarrow \rho(f(a), f(b)) < \varepsilon}$$

↑ δ は ε に依存して決まる数. a や b には依存しない.

復習　f が連続である $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall a \in X, \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ s.t. $\forall b \in X$, $d(a,b) < \delta \Rightarrow \rho(f(a), f(b)) < \varepsilon$.

↑ δ は a と ε に依存して決まる数.

$f: X \to Y$ が一様連続でない

$\boxed{※}$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists a, b \in X \quad \text{s.t.} \quad d(a,b) < \delta \text{ かつ } \rho(f(a), f(b)) \geq \varepsilon.}$$

例. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ は一様連続でない.

[$\because$ $\boxed{※}$ を示そう. $\varepsilon = 1$ とする. $\forall \delta > 0$ について $M = 1/\delta$ とおく. 更に,
$a = M$, $b = M + \delta/2$ とおくと.
$|f(a) - f(b)| = b^2 - a^2 = (b-a)(b+a) \geq \dfrac{\delta}{2} \cdot 2M = \delta M = 1 = \varepsilon$.]

例題　$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$：微分可能, f'：有界 $\Rightarrow$ f は一様連続.

proof　$M := \sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)|$ とおく. $\forall \varepsilon > 0$ について $\delta := \dfrac{\varepsilon}{M+1}$ とすれば, $|a-b| < \delta \Rightarrow |f(a) - f(b)| < \varepsilon$.

$\because$ $a \neq b$ かつ $|a-b| < \delta$ とすると, $|f(a) - f(b)| = \left| \dfrac{f(a) - f(b)}{a - b} \right| \cdot |a-b| = |f'({}^{\exists}\theta)| \cdot |a-b| < (M+1) \cdot \delta = \varepsilon$.　□

↑ 平均値の Thm

発展　$f: X \to Y$ がリプシッツ連続 $\Leftrightarrow$ $\exists M \geq 0$, $\forall a, b \in X$, $\rho(f(a), f(b)) \leq M \cdot d(a,b)$.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ について,　f' が有界 $\Rightarrow$ f はリプシッツ連続 $\Rightarrow$ f は一様連続. (練習問題)

Thm (X,d), (Y,ρ): 距離空間. Xは点列cpt. とする. このとき
$f: X \to Y$が連続 $\Rightarrow$ fは一様連続

proof 対偶を示す. fが一様連続でないとする. すなわち $\boxed{※}$ が成り立つ.

各$n \in \mathbb{N}$について, $\delta = \frac{1}{n}$に対して $\boxed{※}$ を適用すると

$$\exists a_n, b_n \in X \text{ s.t. } d(a_n, b_n) < \frac{1}{n} \text{ かつ } \underbrace{\rho(f(a_n), f(b_n)) \geq \varepsilon}_{☆}$$

Xの点列cpt.性から, a_nは収束部分列 a_{n_k} $(k=1,2,3,\cdots)$ を持つ.

$\alpha = \lim_{k\to\infty} a_{n_k}$ とおく. このとき $b_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} \alpha$ である.

$$\left[\because\ d(b_{n_k}, \alpha) \leq d(b_{n_k}, a_{n_k}) + d(a_{n_k}, \alpha) \leq \frac{1}{n_k} + d(a_{n_k}, \alpha) \xrightarrow{k\to\infty} 0. \right]$$

このとき fは点$\alpha \in X$において連続でない. (つまり fは連続でない)

何故なら, 仮にαで連続であるとすると, $a_{n_k}, b_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} \alpha$ より

$f(a_{n_k}), f(b_{n_k}) \xrightarrow{k\to\infty} f(\alpha)$. したがって

$$\rho(f(a_{n_k}), f(b_{n_k})) \leq \rho(f(a_{n_k}), f(\alpha)) + \rho(f(\alpha), f(b_{n_k})) \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

とくに, 十分大きなk_0について $\rho(f(a_{n_{k_0}}), f(b_{n_{k_0}})) < \varepsilon$.

ところが ☆ によれば $\rho(f(a_{n_{k_0}}), f(b_{n_{k_0}})) \geq \varepsilon$ である (矛盾) $\square$

Thm $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ は連続ならば積分可能である([illegible]本 Thm A.9.5).

proof fは有界である(点列cpt.空間を定義域とする連続関数は最大.最小を持つ).
$s(f)=S(f)$ を示そう. そこで. $|\Delta_k|\to 0\ (k\to\infty)$ をみたす列 $\Delta_k\in P$ を取っておく. (Δ_kは $[a,b]$の k等分の分割でもよい).

$\Delta_k=\{A_1^k,\cdots,A_{n_k}^k\}$, $A_i^k=[x_{i-1}^k,x_i^k]$, $a=x_0^k<x_1^k<\cdots<x_{n_k}^k=b$ とする.

ダルブーのThm より $s(f,\Delta_k)\to s(f)$, $S(f,\Delta_k)\to S(f)\ (k\to\infty)$ であるから,
$S(f,\Delta_k)-s(f,\Delta_k)\longrightarrow 0\ (k\to\infty)$ を示せばよい.

$^\forall\varepsilon>0$ を固定する. $\varepsilon'=\dfrac{\varepsilon}{b-a}$ に対して fの一様連続性を適用すると.

$$^\exists\delta>0 \quad \text{s.t.} \quad {}^\forall x,y\in[a,b],\quad \underbrace{|x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon'}_{☆}$$

この$\delta>0$ に対して $|\Delta_k|\to 0\ (k\to\infty)$ を適用すれば, $^\exists N\in\mathbb{N}$ s.t. $k\geqq N\Rightarrow|\Delta_k|<\delta$.

このとき, $\boxed{k\geqq N\Rightarrow S(f,\Delta_k)-s(f,\Delta_k)<\varepsilon}$ となることを. 以下で確認しよう.

$f|_{A_i^k}$ における最小値を取る点を $a_i^k\in A_i^k$, 最大値を取る点を $b_i^k\in A_i^k$ とする.

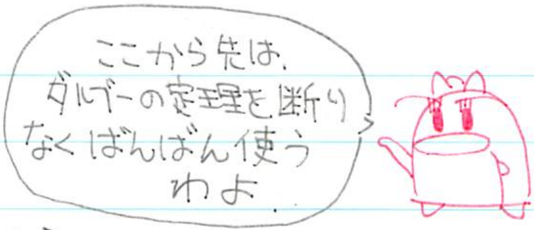
このとき. $a_i^k, b_i^k\in A_i^k$, $|\Delta_k|<\delta$ より. $|a_i^k-b_i^k|<\delta$ である.
ゆえに ☆ より $f(b_i^k)-f(a_i^k)<\varepsilon'$ である.

$$S(f,\Delta_k)-s(f,\Delta_k)=\sum_{i=1}^{n_k}f(b_i^k)(x_i^k-x_{i-1}^k)-\sum_{i=1}^{n_k}f(a_i^k)(x_i^k-x_{i-1}^k)$$

$$=\sum_{i=1}^{n_k}(f(b_i^k)-f(a_i^k))(x_i^k-x_{i-1}^k)<\varepsilon'\underbrace{\sum_{i=1}^{n_k}(x_i^k-x_{i-1}^k)}_{=\,b-a}=\varepsilon$$

□

定積分の基本的性質



Prop. (線形性) $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ が積分可能ならば、

$rf : [a,b] \to \mathbb{R}$ (ただし $r \in \mathbb{R}$) および $f+g : [a,b] \to \mathbb{R}$ も積分可能であり、

(1) $\displaystyle\int_a^b rf(x)\,dx = r\int_a^b f(x)\,dx$.　(2) $\displaystyle\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$.

proof　$|\Delta_k| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ なる列 $\Delta_k \in \mathcal{P}$ を取り、$\Delta_k = \{A_1^k, \cdots, A_{n_k}^k\}$, $A_i^k = [x_{i-1}^k, x_i^k]$ とする。

(1) rf の積分可能性を示そう。$M_i^k = \sup f(A_i^k)$, $m_i^k = \inf f(A_i^k)$ とおく。

このとき、
$$\begin{cases} r \geqq 0 \Rightarrow \sup (rf)(A_i^k) = rM_i^k \\ r < 0 \Rightarrow \sup (rf)(A_i^k) = rm_i^k \end{cases}$$
である。

$\boxed{r \geqq 0 \text{ のとき}}$
$$S(rf) = \lim_{k\to\infty} S(rf, \Delta_k) = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{n_k} rM_i^k (x_i^k - x_{i-1}^k)$$
$$= r \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{n_k} M_i^k (x_i^k - x_{i-1}^k) = r \lim_{k\to\infty} S(f, \Delta_k) = rS(f)$$

同様にして　$s(rf) = r\,s(f)$ も示される。

$\boxed{r < 0 \text{ のとき}}$　$S(rf) = r\,s(f)$,　$s(rf) = rS(f)$ となる。

いずれにせよ、f の可積分性から $S(f) = s(f)$ であり、したがって $S(rf) = s(rf)$.

以上より　rf も可積分である。等式の成立は上の計算により明らかである。

実際、
$$\int_a^b rf(x)\,dx = S(rf) = \begin{cases} rS(f) \\ \text{or} \\ r\,s(f) \end{cases} = rS(f) = r\int_a^b f(x)\,dx.$$

(2) $f+g$ の可積分性を示そう。 これは、次の不等式による。

$$\boxed{s(f,\Delta_k)+s(g,\Delta_k) \leq s(f+g,\Delta_k) \leq S(f+g,\Delta_k) \leq S(f,\Delta_k)+S(g,\Delta_k)} \quad ☆$$

不等式☆の形式的な証明は次の通り。

$$m_i^k = \inf (f+g)(A_i^k) \qquad M_i^k = \sup (f+g)(A_i^k)$$
$$p_i^k = \inf f(A_i^k) \qquad P_i^k = \sup f(A_i^k)$$
$$q_i^k = \inf g(A_i^k) \qquad Q_i^k = \sup g(A_i^k)$$

とおくと。

$$p_i^k + q_i^k \overset{①}{\leq} m_i^k \leq M_i^k \overset{②}{\leq} P_i^k + Q_i^k$$

∵) ①の証明 $\forall x \in A_i^k$, $p_i^k \leq f(x)$, $q_i^k \leq g(x)$ より $p_i^k + q_i^k \leq (f+g)(x)$.

つまり、$p_i^k + q_i^k$ は $(f+g)(A_i^k)$ の下界である。

ゆえに $p_i^k + q_i^k \leq \inf (f+g)(A_i^k) = m_i^k$

↑ 下界の最大値

②も同様に示される

ゆえに

$$s(f,\Delta_k)+s(g,\Delta_k) = \sum p_i^k(x_i^k - x_{i-1}^k) + \sum q_i^k(x_i^k - x_{i-1}^k)$$

$$= \sum (p_i^k + q_i^k)(x_i^k - x_{i-1}^k) \leq \sum m_i^k (x_i^k - x_{i-1}^k) = s(f+g,\Delta_k).$$

$S(f+g,\Delta_k) \leq S(f,\Delta_k)+S(g,\Delta_k)$ も 同様にして示される。

不等式☆において $k \to \infty$ とすれば、

$$(\text{左辺}) \longrightarrow s(f)+s(g)$$
$$\| \leftarrow f, g\text{の可積分性}$$
$$(\text{右辺}) \longrightarrow S(f)+S(g)$$

はさみうちの原理により、 $s(f+g) = S(f+g) = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ を得る。 □

Lem $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ および $c\in(a,b)$ について $g=f|_{[a,c]}$, $h=f|_{[c,b]}$ とすると. (1) $S(g)+S(h)=S(f)$, (2) $s(g)+s(h)=s(f)$.

proof (1)のみ示す. Δ_k^1を$[a,c]$の分割, Δ_k^2を$[c,b]$の分割とし, $|\Delta_k^1|, |\Delta_k^2| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ とする.

$\Delta_k^1 = \{A_1^k, \cdots, A_{n_k}^k\}$, $\Delta_k^2 = \{B_1^k, \cdots, B_{m_k}^k\}$ $\left(A_i^k=[x_{i-1}^k, x_i^k],\ B_j^k=[y_{j-1}^k, y_j^k]\right)$

$M_i^k := \sup f(A_i^k)$, $L_j^k := \sup f(B_j^k)$ とおく $(i=1,\cdots,n_k,\ j=1,\cdots,m_k)$.

$\Delta_k := \Delta_k^1 \cup \Delta_k^2$ とおけば, Δ_kは$[a,b]$の分割であり,
$|\Delta_k| = \max\{|\Delta_k^1|, |\Delta_k^2|\}$. よって $|\Delta_k| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ をみたす.

$$S(g)+S(h) = \lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{n_k} M_i^k(x_i^k - x_{i-1}^k) + \lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{m_k} L_j^k (y_j^k - y_{j-1}^k)$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n_k} M_i^k(x_i^k - x_{i-1}^k) + \sum_{j=1}^{m_k} L_j^k (y_j^k - y_{j-1}^k)\right)$$

$$= \lim_{k\to\infty} S(f, \Delta_k) = S(f)$$ □

Cor 関数fが$[a,c]$, $[c,b]$において積分可能 $(a<c<b)$ ならば,
fは$[a,b]$において積分可能であり, $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

Cor 関数fが$[a,b]$において積分可能, $c\in(a,b)$
$\Rightarrow$ fは$[a,c]$および$[c,b]$において積分可能

proof $g=f|_{[a,c]}$, $h=f|_{[c,b]}$ とおく. 仮に $s(g)<S(g)$ あるいは $s(h)<S(h)$ とすると

前Lemより $s(f)=s(g)+s(h)<S(g)+S(h)=S(f)$. つまり $s(f)\neq S(f)$
これは, fの可積分性に反する. □

Prop: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ を積分可能とする．$c\in\mathbb{R}$ として $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ を

$$g(x):=\begin{cases} f(x) & (x\in[a,b) \text{ のとき}) \\ c & (x=b \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定めれば，g も積分可能で $\int_a^b g(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$

proof. $|\Delta_k|\xrightarrow[k\to\infty]{}0$ なる列 $\Delta_k\in\mathcal{P}$ を取り，$\Delta_{n_k}=\{A_1^k,\cdots,A_{n_k}^k\}$，$A_i^k=[x_{i-1}^k,x_i^k]$ とする．

$M:=\sup\left(f([a,b])\cup g([a,b])\right)$，$M_i^k:=\sup f(A_i^k)$，$\tilde{M}_i^k:=\sup g(A_i^k)$ とおくと，

$$|S(g,\Delta_k)-S(f,\Delta_k)|=\left|\sum_{i=1}^{n_k}\tilde{M}_i^k(x_i^k-x_{i-1}^k)-\sum_{i=1}^{n_k}M_i^k(x_i^k-x_{i-1}^k)\right|$$

$$=\left|\tilde{M}_{n_k}^k(x_{n_k}^k-x_{n_k-1}^k)-M_{n_k}^k(x_{n_k}^k-x_{n_k-1}^k)\right|$$

$i\neq n_k$ のとき，$\tilde{M}_i^k=M_i^k$

$$\leq|\tilde{M}_{n_k}^k|\cdot|\Delta_k|+|M_{n_k}^k|\cdot|\Delta_k|\leq 2|M|\cdot|\Delta_k|\xrightarrow{k\to\infty}0$$

同様にして $|s(g,\Delta_k)-s(f,\Delta_k)|\xrightarrow{k\to\infty}0$ も示せる．

ゆえに $S(g)=\lim_{k\to\infty}S(g,\Delta_k)=\lim_{k\to\infty}S(f,\Delta_k)=S(f)=s(f)=\lim_{k\to\infty}s(f,\Delta_k)=\lim_{k\to\infty}s(g,\Delta_k)=s(g)$．

すなわち，g は積分可能であり，$\int_a^b g(x)\,dx=S(g)=S(f)=\int_a^b f(x)\,dx$ □

- 左端点の値を変更した関数の積分可能性も同様にして示せる．
- また，$[a,b]$ 内の有限個の点 $c_1,\cdots,c_m$（ただし，$a<c_1<\cdots<c_m<b$）における値を変更しても，積分可能である．

(∵) $c_0:=a$，$c_{m+1}:=b$ とおく．$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ において，$c_1,\cdots,c_m$ における値を変更した関数を g とする．各 $f|_{[c_{i-1},c_i]}$ $(i=1,\cdots,m+1)$ は積分可能である（前ページの Cor）．ゆえに，上の Prop. より，これらの両端の値を変更した $g|_{[c_{i-1},c_i]}$ も可積分である．よって これらをつなぎ合わせた $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ も可積分である（前ページのもう1つの Cor）． □

Math Sci Univ Tokyo
Global COE Program

Prop. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ が可積分ならば，$|f(x)|$ も可積分であり

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx. \quad (\text{三角不等式})$$

備考

$|f|(x) := |f(x)|$

proof 前ページの Prop の証明と同様に．Δ_k，A_i^k，x_i^k $(i=0,\cdots,n_k)$ を定める．
また，$M_i^k := \sup f(A_i^k)$，$\widetilde{M}_i^k := \sup |f|(A_i^k) = \sup\{|f(x)| \mid x\in A_i^k\}$ とおく．

Claim 1 $|M_i^k| \leq \widetilde{M}_i^k$

(∵) M_i^k に収束する $f(A_i^k)$ 上の数列が存在する（本 P.77 練習4.1）．
その様な数列 $f(a_m)$ を取る（ただし $a_m\in A_i^k$）．すると，各 $m\in\mathbb{N}$ について $|f(a_m)|\leq\widetilde{M}_i^k$ ゆえ，
$|M_i^k| = \lim_{m\to\infty}|f(a_m)| \leq \widetilde{M}_i^k$. □

Claim 2 $S(|f|,\Delta_k) - s(|f|,\Delta_k) \leq S(f,\Delta_k) - s(f,\Delta_k)$

(∵) $m_i^k := \inf f(A_i^k)$，$\widetilde{m}_i^k := \inf |f|(A_i^k)$ とおく．

$|f(b_m)| \xrightarrow[m\to\infty]{} \widetilde{M}_i^k$，$|f(c_m)| \xrightarrow[m\to\infty]{} \widetilde{m}_i^k$ をみたす $b_m, c_m \in A_i^k$ を取る．

絶対値の三角不等式から

$$\begin{aligned}|f(b_m)| - |f(c_m)| &\leq |f(b_m) - f(c_m)| = \max\{f(b_m)-f(c_m),\ f(c_m)-f(b_m)\}\\ &\leq M_i^k - m_i^k\end{aligned}$$

ここで 左辺について $m\to\infty$ とすれば $\widetilde{M}_i^k - \widetilde{m}_i^k \leq M_i^k - m_i^k$.

求める不等式は，これらと $x_i^k - x_{i-1}^k > 0$ との積に関する総和として得られる． □

仮定より，Claim 2 の右辺は $k\to\infty$ において 0 に収束する．よって（左辺）≥ 0 も $k\to\infty$ において 0 に収束する．
つまり，$|f|$ は積分可能である．また，

$$\begin{aligned}|S(f,\Delta_k)| &= \left|\sum_{i=1}^{n_k} M_i^k (x_i^k - x_{i-1}^k)\right| \leq \sum_{i=1}^{n_k} |M_i^k|(x_i^k - x_{i-1}^k)\\ &\leq \sum_{i=1}^{n_k} \widetilde{M}_i^k (x_i^k - x_{i-1}^k) = S(|f|,\Delta_k)\end{aligned}$$

Claim 1

これら 両辺について $k\to\infty$ とすれば，$|S(f)| \leq S(|f|)$．すなわち $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$. □

$\boxed{\text{注}}$ $|f|$が可積分だからといって、fも可積分であるとは限らない.

例 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ を $f(x):=\begin{cases} 1 & (\text{if } x\in\mathbb{Q}) \\ -1 & (\text{if } x\notin\mathbb{Q}) \end{cases}$

と定めると、$|f(x)|\equiv 1$.

つまり、$|f|$は可積分だが、fは可積分ではない.

Prop. $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ が可積分であるとする.

(1) fg も可積分である.

(2) $1/f(x)$ が有界ならば、$1/f(x)$ も可積分である.

proof (1) f,gは有界ゆえ $\exists M>0$ s.t. $\forall x\in[a,b]$ $|f(x)|, |g(x)|\leq M$

このとき、$|f(x)g(x)-f(y)g(y)| = |(f(x)-f(y))g(x)+f(y)(g(x)-g(y))|$

$\leq M(|f(x)-f(y)|+|g(x)-g(y)|)$

この不等式は、

$S(fg,\Delta_n)-s(fg,\Delta_n)\leq M((S(f,\Delta_n)-s(f,\Delta_n))+(S(g,\Delta_n)-s(g,\Delta_n)))$

を意味する. (右辺) $\to 0$ $(n\to\infty)$ より $S(fg)=s(fg)$.

(2) $1/f(x)$ が有界ゆえ、$\exists M>0$ s.t. $\forall x\in[a,b]$, $|1/f(x)|\leq M$

$|1/f(x)-1/f(y)| = |f(y)-f(x)|/|f(x)f(y)| \leq M^2|f(x)-f(y)|$

これは $S(1/f,\Delta n)-s(1/f,\Delta_n)\leq M^2(S(f,\Delta_n)-s(f,\Delta_n))$ を意味する.

(右辺) $\to 0$ $(n\to\infty)$ より $S(1/f)=s(1/f)$ □

§負の方向の積分

これまで、$a<b$ について $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ の可積分性について論じてきた。

f が $[a,b]$ において可積分であるとき（ただし $a<b$）

$$\int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx$$

と定める。また、$a=b$ の場合について

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

と定める

$\int_b^a f(x)dx$ $(a<b)$ について三角不等式は成立しないので注意しよう。

Prop a,b,c の大小関係がいかなる場合であろうとも、これらを含む閉区間上で f が可積分ならば

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

証明の概略

(1) $a\le c\le b$ の場合。

$a\neq c$, $c\neq b$ の場合は既に示した。これ以外の場合、求めるべき式の右辺において、少なくとも一方の項が0となり、自明な式となる。

(2) $c\le a\le b$ の場合。

(1)より $\int_c^b = \int_c^a + \int_a^b$ $\quad\therefore \int_a^b = -\int_c^a + \int_c^b = \int_a^c + \int_c^b$

(3) $a\le b\le c$ の場合。

(1)より $\int_a^c = \int_a^b + \int_b^c$. $\quad\therefore \int_a^b = \int_a^c - \int_b^c = \int_a^c + \int_c^b$

(4) $b\le c\le a$ の場合。

(1)より $\int_a^b = -\int_b^a = -\left(\int_b^c + \int_c^a\right) = -\int_b^c - \int_c^a = \int_c^b + \int_a^c = \int_a^c + \int_c^b$

(5) $b\le a\le c$ の場合

(1)より $\int_b^c = \int_b^a + \int_a^c$ $\quad\therefore \int_a^b = -\int_b^a = \int_a^c - \int_b^c = \int_a^c + \int_c^b$

(6) $c\le b\le a$ の場合

(1)より $\int_c^a = \int_c^b + \int_b^a$ $\quad\therefore \underset{\displaystyle \int_a^b}{\underset{\shortparallel}{-\int_b^a}} = -\int_c^a + \int_c^b = \int_a^c + \int_c^b$

□

Lem. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ を積分可能とすれば，f は有界ゆえ

$$\exists M>0 \quad \text{s.t.} \quad f([a,b]) \subset [-M,M].$$

このとき，$\alpha,\beta\in[a,b]$ とすると，α,β の大小にかかわらず

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)\,dx\right| \leq |\beta-\alpha|\cdot M.$$

proof $\alpha=\beta$ の場合は両辺とも 0 ゆえ不等式は成立する．

(i) $\alpha<\beta$ の場合．

各 $x\in[\alpha,\beta]$ について，仮定より $-f(x),\ f(x)\leq M$ である．ゆえに

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \leq \int_\alpha^\beta M\,dx = (\beta-\alpha)M = |\beta-\alpha|\cdot M.$$

$$-\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta (-f(x))\,dx \leq \int_\alpha^\beta M\,dx = |\beta-\alpha|\cdot M.$$

したがって，$\left|\int_\alpha^\beta f(x)\,dx\right| \leq |\beta-\alpha|\cdot M$

(ii) $\alpha>\beta$ の場合．

既に示した(i)を用いた．

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)dx\right| = \left|-\int_\beta^\alpha f(x)\,dx\right| = \left|\int_\beta^\alpha f(x)\,dx\right| \leq |\alpha-\beta|\cdot M = |\beta-\alpha|\cdot M. \qquad \square$$

Prop. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$：積分可能，$c\in[a,b]$ とする．
$F:[a,b]\to\mathbb{R}$ を $F(x):=\int_c^x f(t)\,dt$ と定めると，F は一様連続である．

proof f は有界ゆえ $\exists M>0$ s.t. $f([a,b])\subset[-M,M]$．

$\varepsilon>0$ を任意に取る．$\delta:=\varepsilon/M>0$ とおくと「$|x-y|<\delta \Rightarrow |F(x)-F(y)|<\varepsilon$」が成り立つ．実際，$|x-y|<\delta$ とすると，

$$|F(x)-F(y)| = \left|\int_c^x f(t)dt - \int_c^y f(t)\,dt\right| = \left|\int_x^y f(t)\,dt\right| \leq |y-x|\cdot M$$

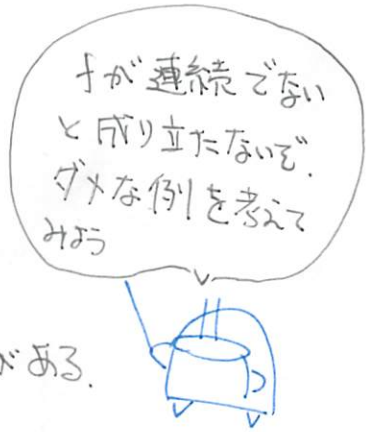
前 Lem.

$$< \delta\cdot M = \frac{\varepsilon}{M}\cdot M = \varepsilon. \qquad \square$$

平均値の定理（積分版）　$a<b$ とする．

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ が連続ならば，

$$\exists\, c\in[a,b] \quad \text{s.t.} \quad \int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$



proof　$[a,b]$ のコンパクト性から，f には最大値 M，最小値 m がある．

このとき，$\exists\, \xi, \eta \in [a,b]$　s.t.　$M=f(\xi)$，$m=f(\eta)$．

$$m\le f(x)\le M \quad \text{ゆえ} \quad \int_a^b m\,dx \le \underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{D\text{ とおく}} \le \int_a^b M\,dx.$$

つまり　$m(b-a)\le D\le M(b-a)$．

$$f(\eta) = m \le \frac{D}{b-a} \le M = f(\xi)$$

中間値の定理より，

$\exists\, c$: ξ と η の間の数（つまり $c\in[a,b]$）

s.t.　$f(c)=\dfrac{D}{b-a}$．

以上より，　$D=f(c)(b-a)$ を得る　□

補足　$a\geqq b$ の場合も，f が連続ならば，$\int_a^b f(x)\,dx$ について平均値の定理が成立する．

proof　(i)　$a=b$ の場合は，両辺は共に 0 で等式が成り立つ

(ii)　$a>b$ の場合

上で示した平均値の定理より，$\exists\, c\in[b,a]$　s.t.　$\int_b^a f(x)\,dx = f(c)(a-b)$．

このとき，

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx = -f(c)(a-b) = f(c)(b-a).$$

□

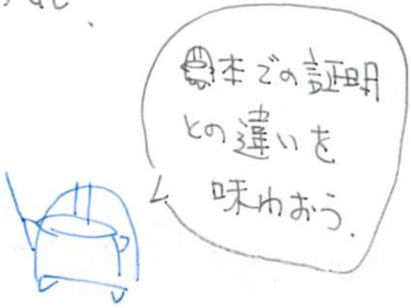
微分積分学の基本定理 $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$：連続，$a\in(\alpha,\beta)$ とする．
このとき，$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ について，$\dfrac{d}{dx}F(x)=f(x)$．

proof　$x\in(\alpha,\beta)$ を固定する．$x+h\in(\alpha,\beta)$ をみたす各 $h\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ について，

$$F(x+h)-F(x)=\int_a^{x+h}f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt=\int_x^{x+h}f(t)\,dt.$$

平均値の定理より，$\exists\,\theta_h$：x と $x+h$ の間の数

$$\text{s.t.}\ \int_x^{x+h}f(t)\,dt=f(\theta_h)\big((x+h)-x\big)=f(\theta_h)\cdot h.$$



θ_h の取り方から，$h\to0$ のとき $\theta_h\to x$ である．よって，f の点 x における連続性より

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(\theta_h)\xrightarrow{h\to0}f(x).\qquad \text{つまり，}F'(x)=f(x).\qquad \square$$

微分積分学の基本公式 I：閉区間，$f:I\to\mathbb{R}$：連続，$a,b\in I$ とする．
$G:I\to\mathbb{R}$ が $G'=f$ をみたすならば，$\int_a^b f(t)\,dt=G(b)-G(a)$．

proof　$F(x):=\int_a^x f(t)\,dt$ とおくと，前定理より，$F'(x)=f(x)$．

ゆえに $(F(x)-G(x))'=f(x)-f(x)=0$．

つまり $F(x)-G(x)$ は定数関数であり，

よって定数 C を用いて $F(x)-G(x)=C$ とかける．

また，$F(a)=\int_a^a f(t)\,dt=0$ ゆえ $-G(a)=C$．

以上より，$\int_a^b f(t)\,dt=F(b)=G(b)+C=G(b)-G(a)$．$\square$

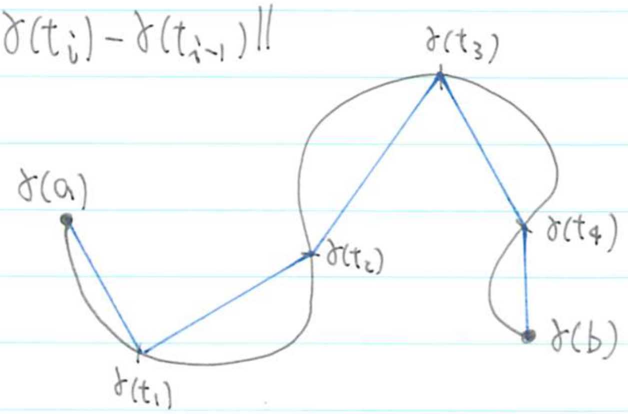
曲線の長さ

復習 連続写像 $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ のことを **曲線** という.

問 曲線の長さをいかに定めるか?

$[a,b]$ の分割 $\Delta = \{A_1, \cdots, A_n\}$ $(A_i = [t_{i-1}, t_i],\ a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b)$ について, 点 $\gamma(t_0), \gamma(t_1), \cdots, \gamma(t_n)$ を線分で結んだ折れ線の長さを $l(\gamma, \Delta)$ で表す. すなわち,

$$l(\gamma, \Delta) := \sum_{i=1}^{n} \| \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) \|$$



仮に曲線 γ の長さが定まり, 長さ L であるとすれば, γ は折れ線よりも遠まわりしていることから,

$$l(\gamma, \Delta) \leq L$$

でなければならない. とくに

$$l(\gamma) := \sup_{\Delta \in \mathcal{P}} l(\gamma, \Delta)$$ と定めれば, $l(\gamma) \leq L$.

補足 Δ_1 が Δ_2 より細かければ, 対応する折れ線は, より遠まわりする可能性があり $l(\gamma, \Delta_2) \leq l(\gamma, \Delta_1)$ となる. (後で何度か用いる. 形式的証明は三角不等式による)

一方で "曲線(の長さ)は折れ線によって近似される" という立場をとるとすれば,

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \Delta \in \mathcal{P} \quad \text{s.t.} \quad |L - l(\gamma, \Delta)| < \varepsilon}$$ となることが望ましい.

上式は $L = \sup_{\Delta \in \mathcal{P}} l(\gamma, \Delta)$ を意味する. (**注** $L = \infty$ の可能性あり). 以上より

定義 曲線 $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ について, その**長さ** (正確には**総移動距離**) $l(\gamma)$ を

$$l(\gamma) := \sup_{\Delta \in \mathcal{P}} l(\gamma, \Delta)$$ と定める.

注 $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ を連続全単射 (つまり狭義単調) とすれば, $l(\gamma) = l(\gamma \circ \varphi)$.
つまり曲線の長さはパラメータの取り方に依存せずに決まる.

Thm $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2$: conti. $|\Delta_n|\xrightarrow[n\to\infty]{}0 \Rightarrow l(\gamma)=\lim_{n\to\infty} l(\gamma,\Delta_n)$

証明はダルブーのThmのときとほぼ同様にして進められる。よって、まず次の補題を示す。

LemI $\forall\Delta_0\in P,\ \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ s.t. $|\Delta|<\delta \Rightarrow l(\gamma,\Delta\vee\Delta_0)-l(\gamma,\Delta)<\varepsilon$

proof of Lem 証明のアイデアの詳細は、ダルブーのThmのためのLemを参照すること。

$\Delta_0=\{A_1,\cdots,A_{n_0}\}$, $A_i=[x_{i-1},x_i]$ $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n_0}=b$ とする。
$\delta_0:=\min\{x_i-x_{i-1}\mid i=1,\cdots,n_0\}$ とおく

$\varepsilon'=\dfrac{\varepsilon}{2(n_0-1)}>0$ に対して γ の一様連続性を適用すれば、

$\exists\delta_1>0$ s.t. $x,y\in[a,b]$, $\underline{|x-y|<\delta_1 \Rightarrow \|\gamma(x)-\gamma(y)\|<\varepsilon'}$ ☆

$\delta:=\min\{\delta_0,\delta_1\}>0$ とおく。このとき、

$\boxed{|\Delta|<\delta \Rightarrow l(\gamma,\Delta\vee\Delta_0)-l(\gamma,\Delta)<\varepsilon}$ となる。

∵ $\Delta=\{B_1,\cdots,B_n\}$, $B_j=[y_{j-1},y_j]$, $a=y_0<y_1<\cdots<y_n=b$ とおく
さて、$|\Delta|<\delta\le\delta_0$。各 B_j の幅が δ_0 未満、各 A_i の幅が δ_0 以上だから、
B_j は $x_1,\cdots,x_{n_0-1}$ のうち1つだけを内部に含むか全く含まないかのいずれかである。
後者の場合は $B_j\in\Delta\vee\Delta_0$ より、B_j に関する項は相殺される。前者の場合、B_j が内部に x_i を含む場合は、B_j に関する項の差を見積もると
$\|\gamma(x_i)-\gamma(y_{j-1})\|+\|\gamma(y_j)-\gamma(x_i)\|-\|\gamma(y_j)-\gamma(y_{j-1})\|<2\varepsilon'$
↑☆を用いた。

よって、$l(\gamma,\Delta\vee\Delta_0)-l(\gamma,\Delta)<(n_0-1)\cdot 2\varepsilon'=(n_0-1)\cdot 2\cdot\dfrac{\varepsilon}{2(n_0-1)}=\varepsilon$ □

proof of Thm (I) $\ell(\gamma)=L<\infty$ の場合. $^\forall\varepsilon>0$ を固定する.

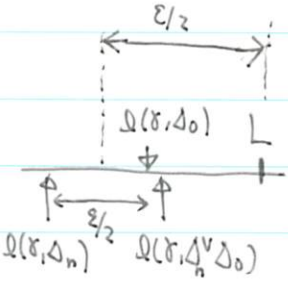
$L-\frac{\varepsilon}{2}$ は 集合 $\{\ell(\gamma,\Delta)\mid\Delta\in\mathcal{P}\}$ の上界ではないから,

$^\exists\Delta_0\in\mathcal{P}$ s.t. $L-\frac{\varepsilon}{2}<\ell(\gamma,\Delta_0)$ ☆☆

$\varepsilon/2>0$ に対して Lem I を適用すれば, 次を満たす $\delta>0$ が取れる:

$$|\Delta|<\delta \Rightarrow \ell(\gamma,\Delta\vee\Delta_0)-\ell(\gamma,\Delta)<\varepsilon/2 \quad ☆☆☆$$

$|\Delta_n|\to 0$ より $^\exists N\in\mathbb{N}$ $n\geq N\Rightarrow|\Delta_n|<\delta$



このとき, $\boxed{n\geq N \Rightarrow L-\ell(\gamma,\Delta_n)<\varepsilon}$

となることは右図より明らかである. 形式的証明は次の通り

☆☆☆ より $\ell(\gamma,\Delta_n\vee\Delta_0)-\ell(\gamma,\Delta_n)<\varepsilon/2$

また ☆☆ より $L-\ell(\gamma,\Delta_0)<\varepsilon/2$. これらを合わせると,

$$\begin{aligned} L-\ell(\gamma,\Delta_n) &= L-\ell(\gamma,\Delta_n\vee\Delta_0)+\ell(\gamma,\Delta_n\vee\Delta_0)-\ell(\gamma,\Delta_n) \\ &< L-\ell(\gamma,\Delta_0)+\varepsilon/2 < \varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon \end{aligned}$$

(II) $\ell(\gamma)=\infty$ のとき. $^\forall M>0$ を固定する.

$\{\ell(\gamma,\Delta)\mid\Delta\in\mathcal{P}\}$ が非有界だから $^\exists\Delta_0\in\mathcal{P}$ s.t. $\ell(\gamma,\Delta_0)>M+1$

$\varepsilon=1$ に対して Lem I を適用すれば $^\exists\delta>0$ s.t. $|\Delta|<\delta\Rightarrow\ell(\gamma,\Delta\vee\Delta_0)-\ell(\gamma,\Delta)<1$ ☆☆☆☆

$|\Delta_n|\to0$ より $^\exists N\in\mathbb{N}$ s.t. $n\geq N\Rightarrow|\Delta_n|<\delta$.

このとき, $n\geq N \Rightarrow \ell(\gamma,\Delta_n)>M$ となる.

∵ ☆☆☆☆ より $\ell(\gamma,\Delta_n\vee\Delta_0)-1<\ell(\gamma,\Delta_n)$ であるから,

$$\ell(\gamma,\Delta_n)>\ell(\gamma,\Delta_n\vee\Delta_0)-1>\ell(\gamma,\Delta_0)-1>(M+1)-1=M$$ □

正確には、$\gamma|(a,b)$ が C^1 級の意。

Thm — C^1級曲線 $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ について、$\gamma(t)=(\gamma_1(t),\cdots,\gamma_n(t))$ とすれば

$$l(\gamma)=\int_a^b \underbrace{\sqrt{\gamma_1'(t)^2+\gamma_2'(t)^2+\cdots+\gamma_n'(t)^2}}\,dt$$

← 速度ベクトルの長さ $\|\gamma'(t)\|$ のこと

$n=2$ の場合について示そう。

証明の概略 $|\Delta_k|\xrightarrow[k\to\infty]{}0$ なる分割について $l(\gamma,\Delta_k)\xrightarrow{k\to\infty}$ (右辺) を示したい。

$\Delta_k=\{A_1^k,\cdots,A_{n_k}^k\}$, $A_i^k=[t_{i-1}^k,t_i^k]$, $a=t_0^k<t_1^k<\cdots<t_{n_k}^k=b$ とすると、

$$l(\gamma,\Delta_k)=\sum_{i=1}^{n_k}\|\gamma(t_i^k)-\gamma(t_{i-1}^k)\|=\sum_{i=1}^{n_k}\sqrt{\left(\gamma_1(t_i^k)-\gamma_1(t_{i-1}^k)\right)^2+\left(\gamma_2(t_i^k)-\gamma_2(t_{i-1}^k)\right)^2}$$

$$=\sum_{i=1}^{n_k}\sqrt{\Bigg(\underbrace{\frac{\gamma_1(t_i^k)-\gamma_1(t_{i-1}^k)}{t_i^k-t_{i-1}^k}}_{=\gamma_1'(c_i^k)}\Bigg)^2+\Bigg(\underbrace{\frac{\gamma_2(t_i^k)-\gamma_2(t_{i-1}^k)}{t_i^k-t_{i-1}^k}}_{=\gamma_2'(d_i^k)}\Bigg)^2}\cdot(t_i^k-t_{i-1}^k)$$

$\left(\exists\, c_i^k, d_i^k\in A_i^k \text{ s.t. } \gamma_1'(c_i^k),\ \gamma_2'(d_i^k) \fallingdotseq \gamma_2'(c_i^k)\right)$ (平均値の定理)

$$\fallingdotseq \sum_{i=1}^{n_k}\sqrt{\gamma_1'(c_i^k)^2+\gamma_2'(c_i^k)^2}\,(t_i^k-t_{i-1}^k)\xrightarrow[k\to\infty]{}\int_a^b\sqrt{\gamma_1'(t)^2+\gamma_2'(t)^2}\,dt$$

(区分求積法)

この誤差を詳しく調べるために、
次の補題を導入する。

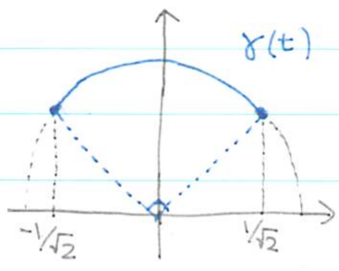
よりみち 本では、円弧の長さ→角→三角関数 の順で定義を与えていた(§6.6)。

ここで、円弧の長さが有限であることは次のようにして分かる:

曲線 $\gamma:[-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}]\to\mathbb{R}^2$ を $\gamma(t):=(t,\sqrt{1-t^2})$ と定めると、

Thm より $l(\gamma)<\infty$. γ は直角に対応する円弧である。

そこで $\pi:=2\,l(\gamma)$ と円周率を定めてもよい。



$$\boxed{\begin{array}{l}\underline{\text{Lem II}}\quad g:[a,b]\times[a,b]\to\mathbb{R} \text{ を } g(x,y):=\sqrt{\gamma_1'(x)^2+\gamma_2'(y)^2} \text{ とする.}\\ c_i^k,\ d_i^k\in A_i^k \text{ とすれば}\\ \qquad L_k:=\sum_{i=1}^{n_k}\left(g(c_i^k,d_i^k)-g(c_i^k,c_i^k)\right)(t_i^k-t_{i-1}^k)\xrightarrow{k\to\infty}0\end{array}}$$

<u>proof of Lem II</u> $\forall\varepsilon>0$ を固定する. $\varepsilon'=\frac{\varepsilon}{b-a}>0$ に対して $g(x,y)$ の一様連続性を適用し

$$\exists\,\delta>0 \quad \text{s.t.}\quad \underbrace{\|(x,y)-(x',y')\|<\delta \Rightarrow |g(x,y)-g(x',y')|<\varepsilon'}_{\#}$$

$|\Delta_k|\xrightarrow[k\to\infty]{}0$ より $\exists N\in\mathbb{N}$ s.t. $k\geq N \Rightarrow |\Delta_k|<\delta$

このとき $\boxed{k\geq N\Rightarrow |g(c_i^k,d_i^k)-g(c_i^k,c_i^k)|<\varepsilon'}$ が成り立つ

[∵ $\|(c_i^k,d_i^k)-(c_i^k,c_i^k)\|=|d_i^k-c_i^k|\leq|\Delta_k|<\delta$
ゆえに # より 結論を得る.]

以上より, $k\geq N$ なる k について

$$|L_k|<\sum_{i=1}^{n_k}\varepsilon'(t_i^k-t_{i-1}^k)=\varepsilon'(b-a)=\varepsilon \qquad \square$$

<u>proof. of. Thm</u> 概略で述べた式変形によれば,

$$l(\gamma,\Delta_k)=\sum_{i=1}^{n_k}\sqrt{\gamma_1'(c_i^k)^2+\gamma_2'(d_i^k)^2}\,(t_i-t_{i-1})=\sum_{i=1}^{n_k}g(c_i^k,d_i^k)(t_i^k-t_{i-1}^k)$$

$$=\underbrace{\sum_{i=1}^{n_k}g(c_i^k,c_i^k)(t_i^k-t_{i-1}^k)}_{\downarrow\ \text{区分求積法}}+\underbrace{L_k}_{\downarrow\ \text{Lem II}\ 0}$$

$$\int_a^b g(t,t)\,dt=\int_a^b\sqrt{\gamma_1'(t)^2+\gamma_2'(t)^2}\,dt \qquad \square$$

関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ のグラフとは、曲線 $\gamma(t)=(t,f(t))$ のことだから、

その長さは $\displaystyle\int_a^b \sqrt{1+f'(t)^2}\,dt$ である。

極座標における曲線

極座標で $(r(t),\theta(t))$ と表される曲線は、直交座標においては
$(r(t)\cos\theta(t),\ r(t)\sin\theta(t))$ となる。

$$(r(t)\cos\theta(t))'^2+(r(t)\sin\theta(t))'^2$$

$$=(r'(t)\cos\theta(t)+r(t)(-\sin\theta(t))\theta'(t))^2$$
$$+(r'(t)\sin\theta(t)+r(t)\cos\theta(t)\theta'(t))^2$$

$$=r'(t)^2+r(t)^2\theta'(t)^2$$

ゆえに 曲線 $\gamma(t)=(r(t),\theta(t))$（極座標表示、$t\in[\alpha,\beta]$）の長さは

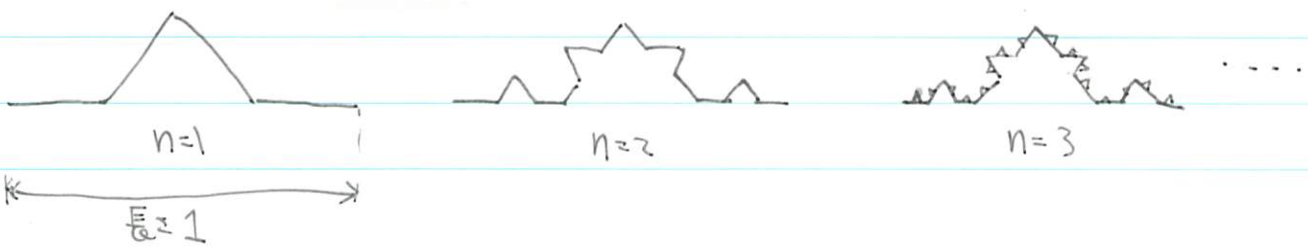
$$\int_\alpha^\beta \sqrt{r'(t)^2+r(t)^2\theta'(t)^2}\,dt.$$

とくに $\theta(t)=t$ のとき、曲線 $r=r(t)$（極座標表示、$t\in[\alpha,\beta]$）の長さは

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{r'(t)^2+r(t)^2}\,dt.$$

C^1級でない曲線

長さ $\left(\frac{4}{3}\right)^n$ の曲線の極限（コッホ曲線）



例 $\gamma(t)=(t,\log t)$ (極座標表示, $t\in[\alpha,\beta]$)　　螺旋(らせん)

$$(t')^2+t^2\cdot(\log t)'^2=1^2+t^2\cdot\frac{1}{t^2}=2$$

($\gamma(t)$は速さが一定)
速さ：速度ベクトルの長さ

$$\therefore\ l(\gamma)=\int_\alpha^\beta\sqrt{2}\,dt=\sqrt{2}[\beta-\alpha]$$

補足 $t=e^\theta$ ($\theta\in[\log\alpha,\log\beta]$) とパラメータ変換すれば,
$(t,\log t)=(e^\theta,\theta)$ つまりこの曲線は $r=e^\theta$ とも書ける

一般に, $a>0$, $b\in\mathbb{R}$ に対して定まる次の曲線

- 極座標表示について $r=ae^{b\theta}$
  あるいは, $(ae^{b\theta},\theta)$
  or $(t,\frac{1}{b}\log\frac{t}{a})$

注 $t=ae^{b\theta}$ を θ について解くと

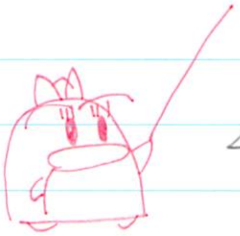
$$e^{b\theta}=t/a$$
$$b\theta=\log t/a$$
$$\therefore\ \theta=\frac{1}{b}\log\frac{t}{a}$$

- 直交座標表示で $(ae^{b\theta}\cos\theta,\ ae^{b\theta}\sin\theta)$

のことを 対数らせん(あるいは 等角らせん, ベルヌーイらせん) という.

一方, $r=a\theta$ (極座標) なる曲線を 代数らせん(アルキメデスらせん) という.

他に 放物らせん $r=a\sqrt{\theta}$ や 双曲らせん $r=\frac{a}{\theta}$ などが知られる.

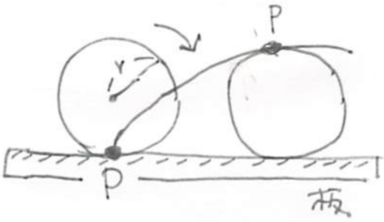


自然界で観測できる対数らせんの例を探してみましょう.

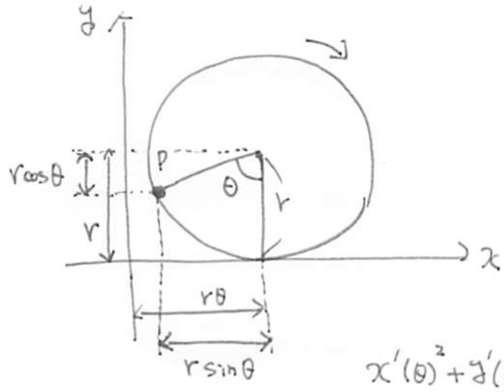
例
- 銀河の渦
- 台風
- お風呂の栓をぬいた時にできる渦
- カタツムリ

例(サイクロイド)

cycloid ≒ 円がある規則にしたがって回転するとき，
円の定点上の軌跡として得られる曲線.



半径 r の円が，円上の点 P において平らな板に接しているとする.
この円を角 θ だけ転がしたときの点 P の位置を $(x(\theta), y(\theta))$ とする.（ただし，$(x(0), y(0)) = (0, 0)$ とし，円は x 軸上を転がるとする）.



$$x(\theta) = r\theta - r\sin\theta = r(\theta - \sin\theta)$$
$$y(\theta) = r - r\cos\theta = r(1 - \cos\theta)$$

$$x'(\theta) = r(1 - \cos\theta),\quad y'(\theta) = r\sin\theta$$

$$x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2 = r^2(1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta) = r^2(2 - 2\cos\theta)$$
$$= 2r^2(1 - \cos\theta) = 2r^2 \cdot 2\sin^2\frac{\theta}{2} = \left(2r\sin\frac{\theta}{2}\right)^2$$

公式
$$\boxed{1 - \cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\left[\begin{aligned} \cos\theta &= \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2}\right) = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} \\ &= 1 - \sin^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2} \end{aligned}\right]$$

よって，円が1回転したときの点 P の軌跡の長さは，

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2}\, d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} 2r\sin\frac{\theta}{2}\, d\theta = 2r\left[-2\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi}$$
$$= 2r\left(-2\cos\pi - (-2\cos 0)\right) = 2r(2 + 2) = \underline{8r}\ //$$

広義積分

有界でない（＝無限に広がる）図形の面積が有限の値をとることがある．

定義 半開区間を定義域とする関数 $f:[a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ （$b=\infty$ でもよい）について，極限 $\displaystyle\lim_{t\to b-0}\int_a^t f(x)\,dx$ が存在するとき，その極限値を区間 $[a,b)$ における f の広義積分とよび，$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ と書く．

注 $b\in\mathbb{R}$ のとき広義積分と通常の定積分の記号の区別がつかない．これを避けるために，次の記法が提案できるが，いずれも一般的ではない．

$$\int_a^{b-} f(x)\,dx, \quad \int_a^{b-0} f(x)\,dx, \quad \int_a^{\to b} f(x)\,dx$$

$f:(a,b]\to\mathbb{R}$ の広ぎ積分 $\displaystyle\lim_{t\to a+0}\int_t^b f(x)\,dx$ も同様に定める．

また，$f:(a,b)\to\mathbb{R}$ の広ぎ積分は，適当に点 $c\in(a,b)$ をとり，

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{t\to a+0}\int_t^c f(x)\,dx + \lim_{t\to b-0}\int_c^t f(x)\,dx$$

と定める．上の値は $c\in(a,b)$ のとり方に依存せずに決まる．

$\because$ $\forall d\in(a,b)$ について，$\displaystyle\lim_{t\to a+0}\int_t^d f(x)\,dx + \lim_{t\to b-0}\int_d^t f(x)\,dx$

$$= \lim_{t\to a+0}\left(\int_t^c f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx\right) + \lim_{t\to b-0}\left(\int_d^c f(x)\,dx + \int_c^t f(x)\,dx\right)$$

$$= \lim_{t\to a+0}\int_t^c f(x)\,dx + \underbrace{\left(\int_c^d f(x)\,dx + \int_d^c f(x)\,dx\right)}_{=0} + \lim_{t\to b-0}\int_c^t f(x)\,dx$$

$$= \lim_{t\to a+0}\int_t^c f(x)\,dx + \lim_{t\to b-0}\int_c^t f(x)\,dx. \qquad \square$$

補足 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ が積分可能な場合は,

$f|_{[a,b)}$ の広義積分 $\displaystyle\lim_{t\to b-0}\int_a^t f(x)\,dx$ と

f の定積分 は一致する.

$(\because)$ $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ を $F(t):=\displaystyle\int_a^t f(x)\,dx$ と定めれば,

F は一様連続であり,

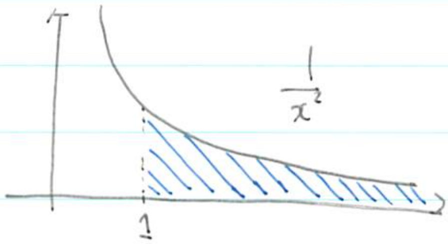
$$\underbrace{\lim_{t\to b-0} F(t)}_{f|_{[a,b)}\text{ の広義積分}} = \underbrace{F(b)}_{f\text{ の定積分}}$$

$\square$

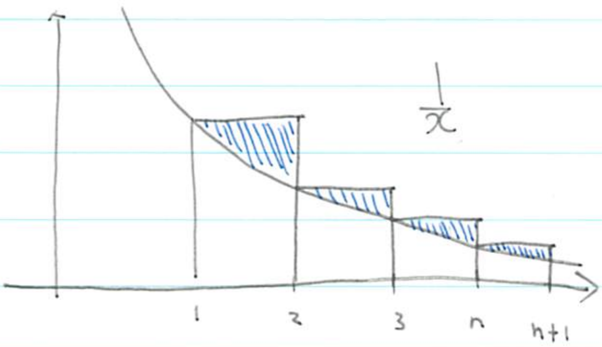
したがって, これらに同じ記号 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ を用いても問題はない.

例 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx$

$\displaystyle= \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^t = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{t}+1\right) = \underline{1}$ //

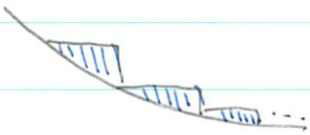


例 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty}\left[\log x\right]_1^t = \lim_{t\to\infty}\log t = \infty$

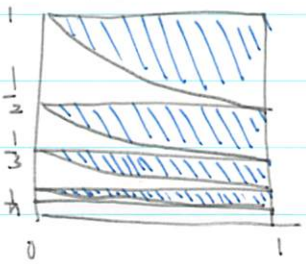


左図より $\displaystyle\underbrace{\int_1^{n+1}\frac{1}{x}\,dx}_{\downarrow n\to\infty \atop \infty} \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

よって追い出しの原理より $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$ (調和級数)

一方、 の面積 $\displaystyle= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \int_1^{n+1}\frac{1}{x}\,dx\right)$ は有限である。

∵ 数列 $\displaystyle a_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \int_1^{n+1}\frac{1}{x}\,dx$ は有界な単調増加列である。

$a_n =$ 

の面積 ≤ 1

← 図形を左寄せしたもの

$\displaystyle\gamma := \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log(n+1)\right) = \underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n\right)}$

を オイラー定数 という

↑ この式をγの定義とすることが多い。

$\gamma = 0.57721\cdots$ であることが知られ、無理数かどうかは分かっていない。

例 より一般に、$s\in\mathbb{R}$ について

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^s}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{s-1} & (s>1 \text{ のとき}) \\ \infty & (s\leq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

∵ $s>1$ のとき $\displaystyle\int_1^t \frac{1}{x^s}\,dx = \left[-\frac{1}{s-1}\cdot\frac{1}{x^{s-1}}\right]_1^t = \frac{1}{s-1}\left(\frac{-1}{t^{s-1}}+1\right) \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{1}{s-1}$

復習 $a>0$ について 関数 $f(x)=x^a$ は $x\to\infty$ で ∞ に発散する。

$s\leq 1$ のとき $x>1$ のとき $x^s\leq x$ である。

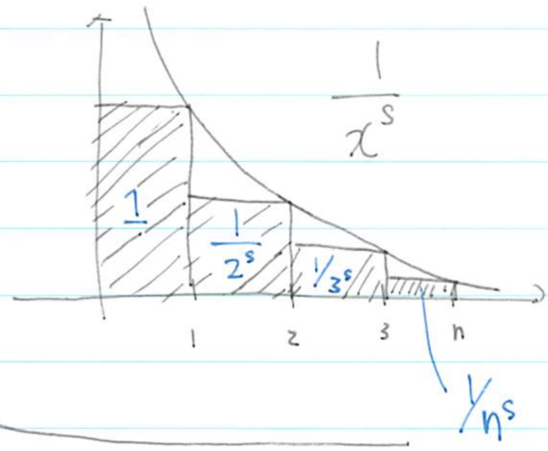
∵ $a>1$ について $f(x)=a^x$ は単調増加。
よって $s\leq 1 \Rightarrow a^s\leq a^1=a$

つまり $\dfrac{1}{x^s}\geq\dfrac{1}{x}$ であり

$$\int_1^t \frac{1}{x^s}\,dx \geq \int_1^t \frac{1}{x}\,dx \xrightarrow{t\to\infty} \infty.$$

$\displaystyle\zeta(s) := \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}$ とおく(これをリーマンのゼータ関数という)

$\zeta(s)$ は $s>1$ において収束する。($\displaystyle S_n=\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^s}$ が有界単調列だから(下図))。



$$\zeta(s) = \lim_{n\to\infty} \boxed{\text{左図の面積}}$$

$$\leq$$

$$1+\int_1^n \frac{1}{x^s}\,dx$$

$$\downarrow (n\to\infty)$$

$$1+\frac{1}{s-1}$$

発展 $\zeta(2) = 1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots = \dfrac{\pi^2}{6}$ であることが知られている。
(バーゼルの問題)

広義積分が定まらない例　$\int_0^t \sin x\, dx$　$t\to\infty$ において収束しない。

つまり $\int_0^\infty \sin x\, dx$ は定められない。

同様に $\int_{-\infty}^0 \sin x\, dx$ も定まらない。

一方で、$\lim_{t\to\infty} \int_{-t}^t \underbrace{\sin x}_{\text{奇関数}}\, dx = \lim_{t\to\infty} 0 = 0$

これを $\int_{-\infty}^\infty \sin x\, dx$ の値としないこと。

広ギ積分の存在性の判定条件

Thm $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ が「各 $t\in[a,b)$ において $f|_{[a,t]}$ は可積分」を満たすとする。

(1) $\exists \lim_{t\to b-0}\int_a^t |f(x)|\,dx \implies \exists \lim_{t\to b-0}\int_a^t f(x)\,dx$

(2) $g:[a,b)\to\mathbb{R}$ が次を満たすとする：

$$\begin{cases} \cdot\ |f|\leq g. \text{ すなわち、} {}^\forall x\in[a,b),\ |f(x)|\leq g(x) \\ \cdot\ \exists \lim_{t\to b-0}\int_a^t g(x) = M \end{cases}$$

このとき、f の広ギ積分は存在し、$\int_a^b f(x)\,dx \leq M$

注) 区間 $(a,b]$ や (a,b) における広ギ積分についても同様のことが成り立つ。

上の定理における g を f の **優関数** という。

証明 (1) あらかじめ，bに収束する数列 $t_n \in [a,b)$ を1つ取っておく．

($b=\infty$ の場合は $t_n \to \infty$ なる列を取る)

$A_n := \int_a^{t_n} f(x)\,dx$，$B_n := \int_a^{t_n} |f(x)|\,dx$ とおく．仮定より B_n は収束列である．

Claim $|A_n - A_m| \leq |B_n - B_m|$

∵ $t_n \geq t_m$ のとき．

$$|A_n - A_m| = \left|\int_a^{t_n} f(x)\,dx - \int_a^{t_m} f(x)\,dx\right| = \left|\int_{t_m}^{t_n} f(x)\,dx\right|$$

$$\leq \int_{t_m}^{t_n} |f(x)|\,dx = B_n - B_m$$

復習 $a \leq b$ のとき $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$ (三角不等式)

$t_n < t_m$ のとき．

$$|A_n - A_m| = |A_m - A_n| = \left|\int_{t_n}^{t_m} f(x)\,dx\right| \leq B_m - B_n = |B_n - B_m|. \quad \square$$

B_nが収束列であることから，$|B_n - B_m| \xrightarrow{n,m\to\infty} 0$．つまり $|A_n - A_m| \xrightarrow{n,m\to\infty} 0$ であり，A_nがコーシー列であることが分かった．ゆえに A_n も収束列である．

$\alpha := \lim_{n\to\infty} A_n$ が求める広義積分であることを示そう．そのためには，次を示せばよい．

$$\boxed{s_n \in [a,b),\ s_n \xrightarrow{n\to\infty} b \implies \int_a^{s_n} f(x)\,dx \xrightarrow{n\to\infty} \alpha}$$

(復習 $\lim_{t\to b} h(t) = \beta \iff b$に収束する任意の数列$s_n$について $\lim_{n\to\infty} h(s_n) = \beta$)

$A_n' := \int_a^{s_n} f(x)\,dx$，$B_n' := \int_a^{s_n} |f(x)|\,dx$ とおくと上のClaimと類似の議論で

$|A_n - A_n'| \leq |B_n - B_n'|$ を得る．また，仮定より B_nとB_n'の極限は一致し，ゆえに $|B_n - B_n'| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$．よって，$|A_n - A_n'| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ となる．

これと $A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha$ をあわせれば，$\lim_{n\to\infty} A_n' = \alpha$．

(2) (1)より、 $\boxed{\exists \lim_{t \to b-} \int_a^t |f(x)|\, dx}$ を示せば、求める主張が得られる。

bに収束する単調列 $t_n \in [a, b)$ を1つ取り、 $B_n := \int_a^{t_n} |f(x)|\, dx$ とおく。

$$B_n \leq \int_a^{t_n} g(x)\, dx \xrightarrow[(n \to \infty)]{\text{単調増加}} M.$$

つまり B_n は有界単調増加列ゆえに収束する。 $\beta := \lim_{n \to \infty} B_n$ とおく。

$\boxed{\text{示すべきこと}}$ $\boxed{s_n \in [a, b),\ s_n \xrightarrow[n \to \infty]{} b \Rightarrow B_n' := \int_a^{s_n} |f(x)|\, dx \xrightarrow[n \to \infty]{} \beta}$

$C_n := \int_a^{t_n} g(x)\, dx$, $C_n' := \int_a^{s_n} g(x)\, dx$ とおけば、 $C_n - C_n' \xrightarrow[(n \to \infty)]{} 0$.

このとき、(1)で行なった評価と類似の議論により、

$$|B_n - B_n'| \leq |C_n - C_n'|$$

が示される。ゆえに $B_n - B_n' \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ であり、

B_n' も β に収束する。 $\square$

Γ関数とB関数

各 $s \in (0,\infty)$ について $\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1}\,dx$ は収束する。(ガンマ関数と呼ぶ)

proof (1) $\lim_{t\to\infty} \int_1^t e^{-x} x^{s-1}\,dx$ の存在について。

Claim x が十分大のとき $e^{-x} x^{s-1} < e^{-\frac{x}{2}}$

(∵) $s-1 \leqq m$ なる自然数 m を取れば、$x \geqq 1$ において

$$\frac{e^{-x} x^{s-1}}{e^{-\frac{x}{2}}} = \frac{x^{s-1}}{e^{\frac{x}{2}}} \leqq \frac{x^m}{e^{\frac{x}{2}}} \xrightarrow{x\to\infty} 0$$

(例えば、ロピタルのThmを m 回適用する)

つまり、$\exists L > 0$ s.t. $x \geqq L \Rightarrow e^{-x} x^{s-1} < e^{-\frac{x}{2}}$.

$[L,\infty)$ において、$e^{-\frac{x}{2}}$ は $e^{-x} x^{s-1}$ の優関数であり

$$\int_L^t e^{-\frac{x}{2}}\,dx = \left[-2e^{-\frac{x}{2}}\right]_L^t \xrightarrow{t\to\infty} 2e^{-\frac{L}{2}}.$$

よって、前定理より $\int_1^t e^{-x} x^{s-1}\,dx = \underbrace{\int_1^L e^{-x} x^{s-1}\,dx}_{\text{定数}} + \int_L^t e^{-x} x^{s-1}\,dx$ は、

$t\to\infty$ で収束する。

(2) $\lim_{t\to 0+} \int_t^1 e^{-x} x^{s-1}\,dx$ の存在について

$\forall x \in [0,\infty)$、$0 \leqq e^{-x} \leqq 1$ より、$e^{-x} x^{s-1} \leqq x^{s-1}$

つまり $(0,1]$ において x^{s-1} は $e^{-x} x^{s-1}$ の優関数であり、

$$\int_t^1 x^{s-1}\,dx = \left[\frac{1}{s} x^s\right]_t^1 \xrightarrow{t\to 0} \frac{1}{s}. \qquad \square$$

$s-1 \neq -1$ に注意する。

Γ関数の性質　(1)　$\Gamma(1) = 1$

☺ $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{\substack{t\to\infty \\ r\to 0+}} \left[-e^{-x}\right]_r^t = 1$ □

(2) $\Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s)$

この項が両方とも 0 に収束することは、前ページの(1),(2)と同様のギロンによる。

☺ $\Gamma(s+1) = \lim_{\substack{t\to\infty \\ r\to 0+}} \int_r^t e^{-x} x^s\,dx$

$$\int_r^t e^{-x} x^s\,dx = \int_r^t (-e^{-x})' x^s\,dx = \left[-e^{-x}x^s\right]_r^t + s\int_r^t e^{-x} x^{s-1}\,dx$$

$$\xrightarrow[\substack{t\to\infty \\ r\to 0+}]{} s\lim_{\substack{t\to\infty \\ r\to 0+}} \int_r^t e^{-x} x^{s-1}\,dx = s\,\Gamma(s)$$ □

(3) $\forall n \in \mathbb{N}$　$\Gamma(n) = (n-1)!$

☺ $n=1$ のとき、$\Gamma(n) = \Gamma(1) = 1 = 0! = (n-1)!$

$n \geqq 2$ のとき、$\Gamma(n) = \Gamma((n-1)+1) = (n-1)\Gamma(n-1)$

$= (n-1)(n-2)\,\Gamma(n-2)$

$= \cdots = (n-1)(n-2)\cdots 1\cdot\Gamma(1) = (n-1)!$ □

このほか、次の公式が知られる。(証明は各自文献を参照のこと)

(4) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

(5) $\Gamma'(1) = -\gamma$　(オイラー定数 × (-1))

(6) $\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\,dx$　$(s \neq 1)$

(7) $\forall p, q > 0$,　$B(p,q) := \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$　(広義積分) とおくと

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$　(ベータ関数と呼ぶ)

(4) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ について.

まず $B(p,q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2p-1} (\cos\theta)^{2q-1}\, d\theta$ に注意する.

$$\left[\because\ B(p,q) = \int_0^1 \frac{x^p \cdot (1-x)^q}{x(1-x)}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2p}\theta \cdot \cos^{2p}\theta}{\sin^2\theta \cdot \cos^2\theta} 2\sin\theta\cos\theta\, d\theta = (\text{右辺}). \right.$$

$x = \sin^2\theta,\quad dx = 2\sin\theta\cos\theta\, d\theta$]

とくに, $B(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \pi$.

$p, q = \frac{1}{2}$ として (7) を適用すると,

$$\Gamma(\tfrac{1}{2})^2 = B(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) \cdot \Gamma(1) = \pi \cdot 1.\ \Gamma(\tfrac{1}{2}) \geq 0 \text{ より } \quad \Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$$

$\boxed{\text{余談}}$ $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1}\, dx$ において $x = t^2$ と変換すると,

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t^2} (t^2)^{s-1} \cdot 2t\, dt = 2\int_0^\infty e^{-t^2} t^{2s-1}\, dt.$$

とくに, $s = \frac{1}{2}$ のとき, $\Gamma(\frac{1}{2}) = 2\int_0^\infty e^{-t^2}\, dt$.

(i) $\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$

[$\because$ e^{-t^2} は偶関数ゆえ (左辺) $= 2\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.]

(ii) $\sigma > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ を定数とすると,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}\, dx = 1.$$

(平均 μ, 分散 σ^2 の正規分布の密度関数は $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2)$)

[$\because$ $t = \frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}$ (つまり $t^2 = \frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2$) とおくと, $dx = \sqrt{2}\sigma\, dt$

$$(\text{左辺}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^\infty e^{-t^2} \cdot \sqrt{2}\sigma\, dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{-t^2} dt = 1.$$]

(7) $\Gamma(p)\cdot\Gamma(q) = \Gamma(p+q)\,B(p\cdot q)$ について.

先の余談で示した

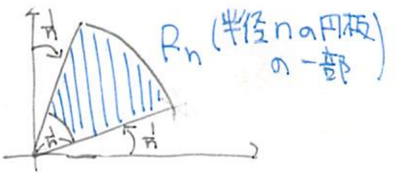
$$\Gamma(s) = 2\int_0^\infty e^{-x^2}\,x^{2s-1}\,dx \quad \text{を用いる.}$$

上の広ぎ積分が定ぎできることから, $2e^{-x^2}x^{2p-1}$ と $2e^{-y^2}y^{2q-1}$ をかけあわせた関数

$$f(x,y) = 4e^{-x^2}x^{2p-1}\,e^{-y^2}y^{2q-1} \quad \text{について}$$

$f(x,y)$ は $(0,\infty)\times(0,\infty)$ 上で広ぎ重積分可能であることが分かる(詳細 略).

$D_n = [\frac{1}{n}, n]\times[\frac{1}{n}, n]$,



とおく. $(0,\infty)^2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = \bigcup_{n=2}^{\infty} R_n$

したがって, $\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n} f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty}\iint_{R_n} f(x,y)\,dx\,dy.$ ——

(i) の(左辺) $= \Gamma(p)\cdot\Gamma(q)$

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \left(\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{n} 2e^{-x^2}x^{2p-1}\,dx\right)\left(\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{n} 2e^{-y^2}y^{2q-1}\,dy\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\int_{\frac{1}{n}}^{n} 2e^{-x^2}x^{2p-1}\,dx \int_{\frac{1}{n}}^{n} 2e^{-y^2}y^{2q-1}\,dy\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\int_{\frac{1}{n}}^{n}\left(\int_{\frac{1}{n}}^{n} 2e^{-x^2}x^{2p-1}\,dx\right) 2e^{-y^2}y^{2q-1}\,dy\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{n}\left(\int_{\frac{1}{n}}^{n} f(x,y)\,dx\right)dy = \lim_{n\to\infty}\iint_{D_n} f(x,y)\,dx\,dy.$$

(ii) の(右辺) $= \Gamma(p+q)\cdot B(p,q)$

$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta \quad (r,\theta)\in[\frac{1}{n}, n]\times[\frac{1}{n}, \frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}]$ とおく. ヤコビアンは r だから,

$$\iint_{R_n} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{[\frac{1}{n},n]\times[\frac{1}{n},\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}]} 2e^{-r^2}\,r^{2(p+q)-2}\cdot\underbrace{r}_{\text{ヤコビアン}}\cdot 2(\cos\theta)^{2p-1}(\sin\theta)^{2q-1}\,dr\,d\theta$$

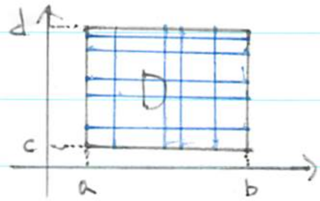
$$= \int_{\frac{1}{n}}^{n} 2e^{-r^2}r^{2(p+q)-1}\,dr \cdot \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}} 2(\sin\theta)^{2q-1}(\cos\theta)^{2p-1}\,d\theta$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \Gamma(p+q)\cdot B(q,p) = \Gamma(p+q)\cdot B(p,q)$$

重積分

多変数関数における定積分のことを 1変数の場合と区別して"重積分"と呼ぶ。
なお、この授業では多変数関数における"不定積分"については扱わない。
多変数の不定積分とは何か？という問いを深めていくと、ベクトル解析 と呼ばれる分野に出会い、この単元のみで 15回分の講義が必要になるだろう。

$D = [a,b] \times [c,d]$ $\left(:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b] \text{ かつ } y \in [c,d]\}\right)$ とおく。
$f : D \to \mathbb{R}$.



Dの分割に対して、1変数の場合と類似の議論を行うことで、fの上ダルブー和、下ダルブー和が定められる。
分割を細かくすることによるこれらの極限が一致するとき、その値は、fのグラフ(曲面)と D ではさまれた図形の体積に相当する量であると考えられる。この極限値を、fの重積分と呼び

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy \quad \left(\text{あるいは、} \int_D f(x,y)\,dxdy,\ \int_D f(x,y),\ \int_D f \text{ など}\right)$$

と書く。n変数関数の重積分も同様に定める。

有界集合上の重積分

$X \subset \mathbb{R}^2$：有界集合、$f : X \to \mathbb{R}$.

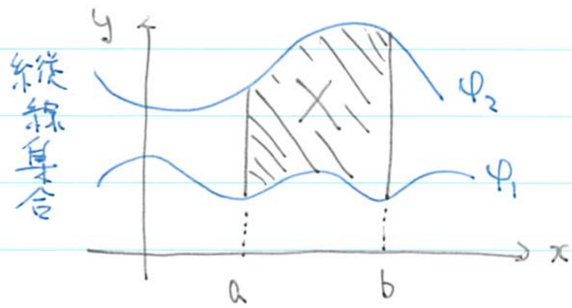
Xの有界性から、$\exists a,b,c,d \in \mathbb{R}$ s.t. $X \subset \underbrace{[a,b] \times [c,d]}_{D \text{ とおく}}$.
$f : X \to \mathbb{R}$ の重積分を、次で定める $\tilde{f} : D \to \mathbb{R}$ の重積分と定義する。

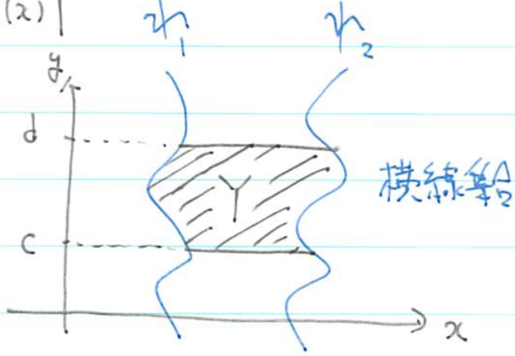
$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & (\text{if } x \in X) \\ 0 & (\text{if } x \notin X) \end{cases}$$

重積分の値を具体的に求められるのは、次の場合である。

定義 連続関数 $\varphi_i : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\psi_i : [c,d] \to \mathbb{R}$ $(i=1,2)$ を用いて定められる次の集合を**単純な領域**（あるいは**縦（横）線（型）集合**）と呼ぶ。

$$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b],\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$$





$$Y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [c,d],\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\}$$

注 X, Y は有界閉集合である。

ThmA. 上で定める X, Y を定義域とする連続関数 $f : X \to \mathbb{R}$, $g : Y \to \mathbb{R}$ は積分可能であり、次の等式が成り立つ。

(i) $$\iint_X f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

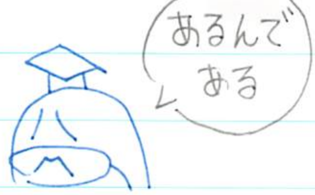
(ii) $$\iint_Y g(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} g(x,y)\,dx \right) dy$$

上式(i),(ii)の右辺に現れる二重の定積分のことを**累次積分**あるいは**逐次積分**と呼び、これを慣例では次のように書く：

(i) $$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$$ (ii) $$\int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} g(x,y)\,dx$$

補足 定義域が縦線集合であり、かつ横線集合でもある場合は、(i),(ii)のいずれかを用いて計算してもよい。ただし、計算の難度に著しく差がでることがあるんであるんである。

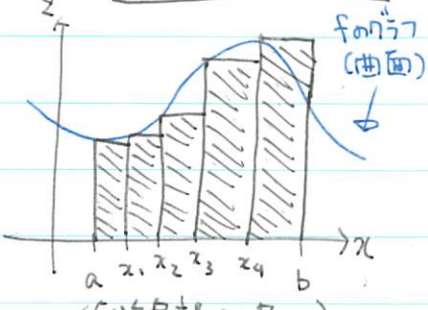
ThmAの証明の概略



(i)について論じる. $g(x) := \displaystyle\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$ とおく.

gは連続関数である(証明は次ページ). つまり, gは積分可能である.
Xとfのグラフではさまれた立体をBとする.
また $X \subset [a,b]\times[c,d] = D$ となるように $c,d \in \mathbb{R}$ を取り,
D上の関数にfを拡張したものを$\tilde{f}$とする(ただし $\tilde{f}|_{D\setminus X} \equiv 0$).

Bを真横から見た図



(斜線部がB_Δ)

$[a,b]$の分割 Δ : $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ に対して,
Bを平面 $x=x_i$ $(i=0,\dots,n-1)$ で輪切りにする.
その切り口 T_i を底面とする厚さ $x_{i+1}-x_i$ の板たちを集めた立体 B_Δ を考える.
Δを細かくすることにより, B_Δの体積はBの体積すなわち(i)の左辺に収束すると思われる.
(実際, $[a,b]$の分割Δを反映する形で長方形Dの分割$\tilde{\Delta}$を取れば,
立体B_Δは$\tilde{\Delta}$に関する$\tilde{f}$についての上下のダルブー和を体積とする図形に挟まれている.
つまり, B_Δの体積は上下のダルブー和でおさえられ, これらは$\tilde{\Delta}$を細くすることで(i)の左辺に収束する. つまり, B_Δの体積も(i)の左辺に収束する.)

さて, B_Δの体積を求めよう. T_iの面積 $= \displaystyle\int_{\varphi_1(x_i)}^{\varphi_2(x_i)} f(x_i,y)\,dy = g(x_i)$ ゆえ,

$$B_\Delta\text{の体積} = \sum_{i=0}^{n-1} g(x_i)(x_{i+1}-x_i) = \sum_{j=1}^{n} g(\xi_j)(x_j-x_{j-1})$$

$\xi_j = x_{j-1}$ とおいた.

gの可積分性および区分求積法により, 上式は $|\Delta|\to 0$ として

$$\int_a^b g(x)\,dx = \text{(i)の左辺}$$ に収束する.

収束は唯一つであることから, 等式(i)を得る. □

注 a,b,c,d は前ページで与えたものとする.

補題 $g(x)=\displaystyle\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$ は連続である.

証明 点 $x\in[a,b]$ における連続性を示そう. $|f|$ の最大値を L とする.

$^\forall\varepsilon>0$ を取る. $\varphi_1,\varphi_2:[a,b]\to\mathbb{R}$, $f:X\to\mathbb{R}$ の一様連続性より

$^\exists\delta>0$ s.t. $\begin{cases} |x-x'|<\delta \Rightarrow |\varphi_i(x)-\varphi_i(x')|<\varepsilon/5L \\ \|(x,y)-(x',y')\|<\delta \Rightarrow |f(x,y)-f(x',y')|<\varepsilon/5(d-c) \end{cases}$

このとき $\boxed{|x-x'|<\delta \Rightarrow |g(x)-g(x')|<\varepsilon}$ となることが次のように確認できる.

$|x-x'|<\delta$ とし, $M=\min\{\varphi_2(x),\varphi_2(x')\}$, $m=\max\{\varphi_1(x),\varphi_1(x')\}$ とおく.

このとき $c\le\varphi_1(x),\varphi_1(x')\le m$ および $M\le\varphi_2(x),\varphi_2(x')\le d$ となっている.

$$g(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{m} f(x,y)\,dy+\int_m^M f(x,y)\,dy+\int_M^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$$ であり $g(x')$ も同様に分解できる.

ゆえに $$|g(x)-g(x')|\le\left|\int_{\varphi_1(x)}^{m} f(x,y)\,dy\right|☆+\left|\int_m^M (f(x,y)-f(x',y))\,dy\right|※$$
$$+\left|\int_M^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right|☆+\left|\int_{\varphi_1(x')}^{m} f(x',y)\,dy\right|☆+\left|\int_M^{\varphi_2(x')} f(x',y)\,dy\right|☆$$

第1項について
$$\left|\int_{\varphi_1(x)}^{m} f(x,y)\,dy\right|\le\int_{\varphi_1(x)}^{m}|f(x,y)|\,dy\le(m-\varphi_1(x))\cdot L<\frac{\varepsilon}{5L}\cdot L=\frac{\varepsilon}{5}$$

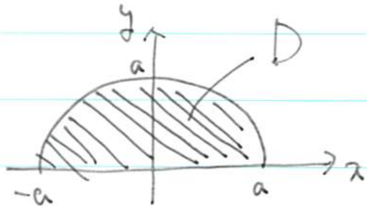
同様の理由により 〜☆ な各項はすべて $\frac{\varepsilon}{5}$ 未満である.

M, m のうち大きい方を N, 小さい方を n とすれば $c\le n\le N\le d$ であり,

$$〜※\le\int_n^N|f(x,y)-f(x',y)|\,dy\le(N-n)\frac{\varepsilon}{5(d-c)}\le\frac{\varepsilon}{5}.$$

以上をあわせて $|g(x)-g(x')|<\varepsilon$ を得る. □

例題　$\iint_D x^2y\,dx\,dy$，$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le a^2,\ y\geq 0\}$ の場合.



(i) $D=\{(x,y) \mid -a\le x\le a,\ 0\le y\le\sqrt{a^2-x^2}\}$ として.

$$(\text{与式})=\int_{-a}^{a}dx\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}x^2y\,dy$$

$$=\int_{-a}^{a}x^2\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}x^2(a^2-x^2)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{x^5}{5}+\frac{a^2}{3}x^3\right]_{-a}^{a}=-\frac{a^5}{5}+\frac{a^5}{3}=\frac{2}{15}a^5$$

↑奇関数

(ii) $D=\{(x,y) \mid 0\le y\le a,\ -\sqrt{a^2-y^2}\le x\le\sqrt{a^2-y^2}\}$ として.

$$(\text{与式})=\int_0^{a}dy\int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}}x^2y\,dx=\int_0^{a}y\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}}dy$$

θ	$0\to\frac{\pi}{2}$
y	$0\to a$

$$=\frac{2}{3}\int_0^{a}y\sqrt{a^2-y^2}^{\,3}\,dy$$　$y=a\sin\theta$ とおくと　$dy=a\cos\theta\,d\theta$

$$=\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}a\sin\theta\,(a\cos\theta)^3\cdot a\cos\theta\,d\theta=\frac{2}{3}a^5\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos^4\theta\,d\theta}_{=A\text{ とおく.}}$$

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos\theta)'\cos^4\theta\,d\theta=\underbrace{\left[-\cos\theta\cos^4\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=1}-\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos\theta)4\cos^3\theta\cdot(-\sin\theta)\,d\theta}_{=4A}$$

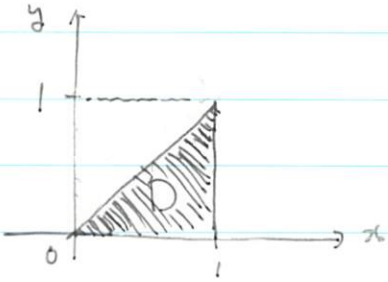
よって $5A=1$. つまり $A=1/5$ であり，(i)と同じ値を得る.

補足　$A=\left[-\frac{1}{5}\cos^5\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{5}(0-1)=\frac{1}{5}$ と計算してもよい.

例 $\int_0^1 dy \int_y^1 e^{-x^2}\,dx$

ポイント e^{-x^2} の不定積分は初等関数ではない

求める重積分における被積分関数は、次の横線集合 D を定義域としている。



D を縦線集合に書き直すと、

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x\}$$

ゆえに (与式) $= \int_0^1 dx \int_0^x e^{-x^2}\,dy = \int_0^1 e^{-x^2}\left[y\right]_0^x dx$

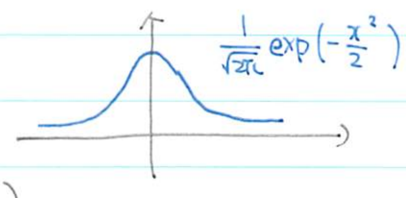
$= \int_0^1 x e^{-x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}\left(e^{-1} - e^0\right)$

$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e} - 1\right) = \underline{\frac{e-1}{2e}}$ //

補足 多項式、指数・対数関数、三角関数、逆三角関数 および これらの和、差、積、商、合成を組み合わせることで得られる関数を初等関数という。

e^{x^2}, $\frac{1}{\log x}$, $\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}$, $\frac{\sin x}{x}$ などの不定積分は初等関数ではないことが知られている。

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ は正規分布の密度関数であり、



$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 1$. (詳細は Γ関数の項目にて)

Thm B (微分と積分の順序交換)　$D=[a,b]\times[c,d]$ とする.

$f(x,y)$ および $f_y(x,y)$ が D 上連続ならば

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\,dx$$

証明　$g:[c,d]\to\mathbb{R}$ を　$g(t):=\int_a^b f_y(x,t)\,dx$ と定めれば.
先に述べた補題により, g は連続である.

$G:[c,d]\to\mathbb{R}$ を　$G(y):=\int_c^y g(t)\,dt$ と定めれば, 微分積分学の基本定理により

$$\frac{d}{dy}G(y) = g(y) \quad \text{—— ①}$$

一方で, $G(y)$ は次のように変形できる:

$$G(y) = \int_c^y \left(\int_a^b f_y(x,t)\,dx\right)dt = \int_a^b \left(\int_c^y f_y(x,t)\,dt\right)dx$$

f_y の連続性より 2つの累次積分は一致する.

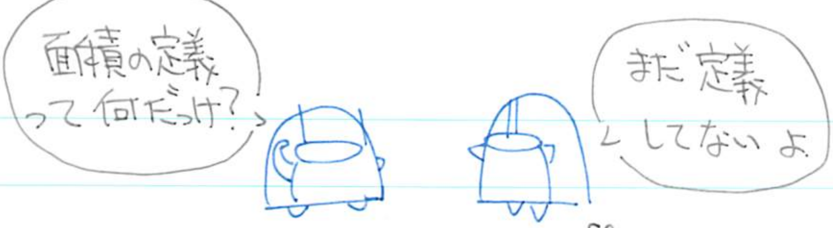
$$= \int_a^b \Big[f(x,t)\Big]_{t=c}^{t=y}\,dx$$

$$= \int_a^b f(x,y)\,dx - \underbrace{\int_a^b f(x,c)\,dx}_{\text{定数}}$$

ゆえに　$$\frac{d}{dy}G(y) = \frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)\,dx \quad \text{—— ②}$$

①, ② より 公式を得る.　□

余談①



面積 有界集合 $X\subset\mathbb{R}^2$ に対して、重積分 $\iint_X 1\,dx\,dy$ が定まるとき、Xは**面積確定**（あるいは**ジョルダン可測**）であるといい、その値をXの**面積**と定める。

命題 $f:[a,b]\to[0,\infty)$ が連続ならば $X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in[a,b],\ 0\leq y\leq f(x)\}$ は面積確定であり、

$$\iint_X 1\,dx\,dy=\int_a^b f(x)\,dx$$

$\because$ (左辺) $=\displaystyle\int_a^b\left(\int_0^{f(x)}1\,dy\right)dx=\int_a^b\left[y\right]_0^{f(x)}dx=$ (右辺) $\square$

以上の理論はn次元の場合についても成立し、図形のn次元体積が定められる。
面積や体積を一般化する概念として、測度がある → 詳しくは測度論を参照。

余談②

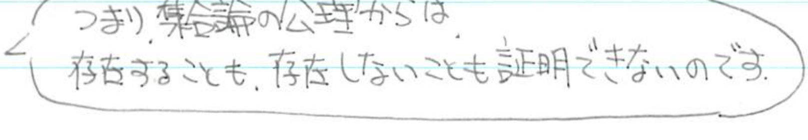
本節冒頭のThm.Aの特別な場合として、次が成り立つ。

$$f(x,y)\text{が連続}\Longrightarrow\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy.$$

問 次をみたす関数 $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ は存在するか？

fは連続ではないが、逐次積分 $\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx$ および $\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy$ がいずれも定められ、これらの値が異なる

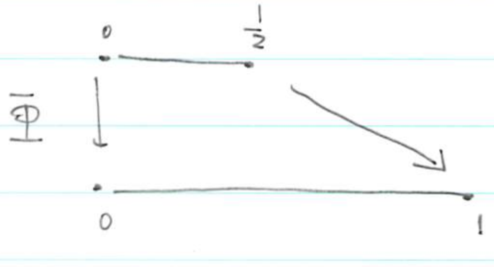
答 上をみたすfの存在性・非存在性は、いずれも集合論と矛盾しない。



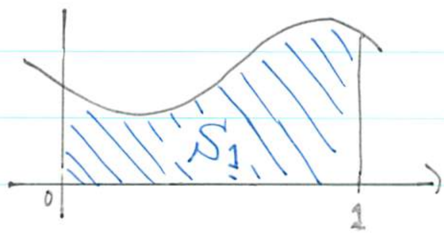
重積分の変数変換（置換積分）

◎ 1変数のときの復習

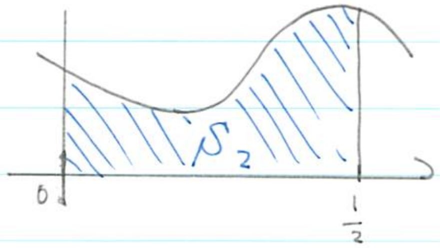
$\Phi : [0, \frac{1}{2}] \to [0, 1]$, $\Phi(t) = 2t$



$f : [0,1] \to \mathbb{R}$ の定積分



$f \circ \Phi : [0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$ の定積分



S_1の面積 $=$ S_2の面積 $\times 2$.

（Φにより底辺の長さが2倍になったゆえ面積も2倍に）

つまり $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f \circ \Phi(t) \times \underbrace{2}_{} \, dt$

Φの増加率 $= \Phi'(t)$

（一般には、Φの増加率は場所によって異なるため、増加率をかける操作は、積分の中に入れる）

以上のことから、多変数の場合について、次の等式が示唆される。

$E, D \subset \mathbb{R}^n$, $\Phi : E \to D$, $f : D \to \mathbb{R}$ について

Φの体積拡大率

$$\int_D f(x_1, \cdots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n = \int_E f \circ \Phi(u_1, \cdots, u_n) \times \left| \boxed{} \right| du_1 \cdots du_n$$

$\boxed{\text{注}}$ 重積分では積分の方向を考えないことから、体積拡大率の絶対値をかける

重積分では、$f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_D f(x) \geq 0$ である。

1変数ではこのようなことはなかった。例 $\displaystyle\int_0^{-1} 1\, dx = -1$

問. 体積拡大率をいかに見積もるか?

重が線形写像の場合 $A=[a_1,\cdots,a_n]$: $n\times n$ 行列

$T_A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}:=A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ と定めれば $T_A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ は線形であり
T_A の体積拡大率はいたるところで一致する. その値は.

$$T_A(\underbrace{[0,1]^n}_{\text{単位立方体}})\text{の体積}=a_1,\cdots,a_n\text{で張られる平行}2n\text{面体の体積}=\det A$$

注 ここでは向きつきの体積を考えている. 上の事実の詳細は線形代数学にゆずる.

重が一般の場合 $(n=2)$ $\quad\Phi(u,v)=\begin{pmatrix}x(u,v)\\ y(u,v)\end{pmatrix}$: C^1 級とする.

$$\Phi(u+h,v+k)-\Phi(u,v)=\begin{pmatrix}x(u+h,\ v+k)-x(u,v)\\ y(u+h,\ v+k)-y(u,v)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}x_u(u,v)h+x_v(u,v)k+o(\|(h,k)\|)\\ y_u(u,v)h+y_v(u,v)k+o(\|(h,k)\|)\end{pmatrix}$$

$$=\underbrace{\begin{pmatrix}x_u(u,v)h+x_v(u,v)k\\ y_u(u,v)h+y_v(u,v)k\end{pmatrix}}_{=\begin{bmatrix}x_u(u,v) & x_v(u,v)\\ y_u(u,v) & y_v(u,v)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h\\ k\end{bmatrix}}+\boxed{\text{微小ベクトル}}$$

この 2×2 行列を $J_\Phi(u,v)$ とおく.

したがって. (u,v) 付近における重のベクトル値 $\Phi(u+h,v+k)$ は.

$$T_{J_\Phi(u,v)}\begin{pmatrix}h\\ k\end{pmatrix}+\Phi(u,v)$$ で近似できる. (線形写像 + 平行移動)

この写像の体積拡大率は $\det J_{\Phi(u,v)}$ である.

ヤコビ行列式

連結開集合 $E\subset\mathbb{R}^n$ 上の C^1級写像 $\Phi: E\to\mathbb{R}^n$

ただし $\Phi(t_1,\cdots,t_n)=(x_1(t_1,\cdots,t_n),\cdots,x_n(t_1,\cdots,t_n))$

に対して定められる次の $n\times n$ 行列を**ヤコビ行列**という。

$$J_\Phi(t_1,\cdots,t_n) := \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1}, & \frac{\partial x_1}{\partial t_2}, & \cdots, & \frac{\partial x_1}{\partial t_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial t_1}, & \frac{\partial x_n}{\partial t_2}, & \cdots, & \frac{\partial x_n}{\partial t_n} \end{bmatrix}.$$

J_Φ のほかに、$\dfrac{\partial(x_1,\cdots,x_n)}{\partial(t_1,\cdots,t_n)}$, $D\Phi$, $\dfrac{\partial\Phi}{\partial t}$ などの記号も用いられる。

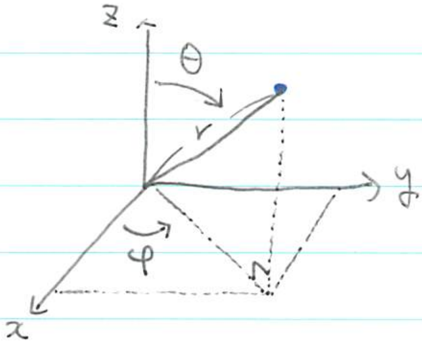
補足 ヤコビ行列およびその行列式は共に Jacobian (ヤコビアン) と呼ばれる。

例 (極座標変換)　(1) $\Phi(r,\theta)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

$$\det J_\Phi(r,\theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta-(-r\sin^2\theta) = r.$$

(2) $\Phi(r,\theta,\varphi)=(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$.

$$\det J_\Phi(r,\theta,\varphi)=r^2\sin\theta \quad \text{(各自確かめよ)}$$



冒頭で予想した変数変換公式は、次の Thm C の設定の下で成り立つことが知られている。

筑波大学　数学系
305-8571 茨城県つくば市天王台1-1-1
Fax : 0298-53-6501　Tel : 0298-53-
University of Tsukuba
Institute of Mathematics
Tsukuba, Ibaraki 305-8571, Japan

Thm Cの証明は？

志の高い微積の本を参照しよう。

つまり、この冊子では"証明略"よ。

Thm C（重積分の変数変換公式）

$E, D \subset \mathbb{R}^n$ の領域*

$\Phi : E \to D : C^1$ 級 かつ Φ は体積0の集合を除いて全単射とする。

このとき、連続関数 $f : D \to \mathbb{R}$ に対して

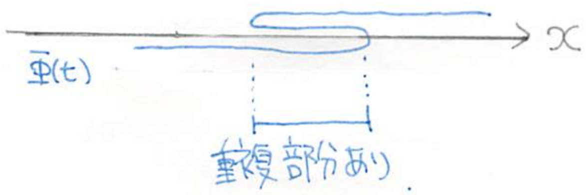
$$\int_D f(x_1, \cdots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n$$
$$= \int_E f \circ \Phi(t_1, \cdots, t_n) \cdot \left| \det J_\Phi(t_1, \cdots, t_n) \right| dt_1 \cdots dt_n.$$

注(*) "領域"とは、ここでは 有界な連結開集合に 境界上の点をすべて加えたコンパクト集合のことを指す。

（ふだんは「領域」とは連結開集合のことを指すことが多いため、注意すること。）

$|\det J_\Phi|$ は行列式の絶対値です。（つまり $\|J_\Phi\|$ のこと）
絶対値のつけ忘れに注意しましょう。

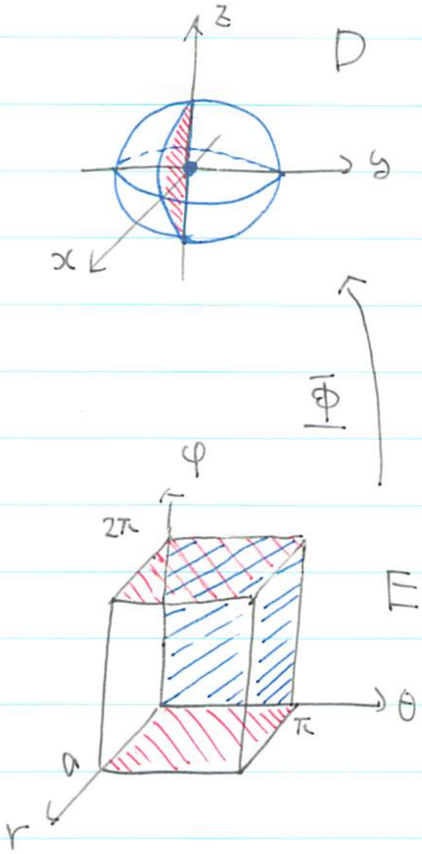
補足　1変数の置換積分では、Φ は1対1でなくてもよく、$|\det J_\Phi(t)|$ の代わりに $\det J_\Phi(t) = \Phi'(t)$ を用いていた。（$J_\Phi(t)$ は 1×1 の行列）



1変数のときは、負の方向の積分として相殺されるため、重複があっても問題がなかった。

1変数とは異なり、負の方向を考えない重積分では、$f(x,y) \geq 0$ ならば $\int_D f(x,y)\,dxdy \geq 0$ となる。
Φ に重複があると、その範囲において重複して体積を足してしまうことになり、上の公式は成り立たない。

例（球の体積）　$a \geq 0$ とする.



$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}$$

Dの体積 $= \int_D dx\,dy\,dz$ を計算する

体積の定義は面積と同様にして定める.

$\Phi : E \to D$ を極座標変換とする

Φ は図の斜線部分を除けば全単射である.

体積ゼロ

よって

$$(\text{与式}) = \int_E |\det J_\Phi(r, \theta, \varphi)|\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \int_E |r^2 \sin\theta|\, dr\, d\theta\, d\varphi = \int_E r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

$\theta \in [0, \pi]$ ゆえ $\sin\theta \geq 0$

$$= \int_0^a dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} r^2 \sin\theta\, d\varphi = 2\pi \int_0^a dr \int_0^\pi r^2 \sin\theta\, d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^a r^2 \underbrace{\left[-\cos\theta\right]_0^\pi}_{=2} dr = 4\pi \int_0^a r^2\, dr$$

$-\cos\pi + \cos 0 = -(-1) + 1 = 2$

$$= 4\pi \left[\frac{1}{3} r^3\right]_0^a = \frac{4}{3}\pi a^3$$