

多面体の距離位相と弱位相

筑波大学 数理物質科学研究科
酒井 克郎・嶺 幸太郎 (発表者)

K を単体的複体とし, $|K| = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$ を K による多面体とする. $|K|$ には二つの位相, いわゆる弱位相と距離位相が考えられ, 前者は K の細分によって位相を保存するが, 後者は必ずしもそうではない. 距離位相を保つ K の細分の特徴付けが D. W. Henderson [1] によって与えられたが, 今回の研究で得られた, より実用的な特徴付けを紹介する.

1. 多面体の位相

K の頂点集合を $K^{(0)}$ とし, 各 $v \in K^{(0)}$ に対して, $x \in |K|$ の K に関する v における重心座標を $\beta_v^K(x)$ で表わす. $|K|$ における二つの位相, 弱位相 (ホワイトヘッド位相) および距離位相について, これらの位相空間を区別して $|K|_w, |K|_m$ と書こう. これらの定義はそれぞれ次のようになる.

定義. 部分集合 $U \subset |K|$ が $|K|_w$ で開集合になるとは, 任意の単体 $\sigma \in K$ に対して $U \cap \sigma$ が σ の開集合となることと定義する.

定義. $|K|_m$ は次で定義される距離 d_K^p (ただし $p \geq 1$) や d_K^∞ で導入される距離空間のことである.

$$d_K^p(x, y) = \sum_{v \in K^{(0)}} \sqrt[p]{|\beta_v^K(x) - \beta_v^K(y)|^p},$$
$$d_K^\infty(x, y) = \sup_{v \in K^{(0)}} |\beta_v^K(x) - \beta_v^K(y)|.$$

なお, これらの距離位相はすべて一致する. したがって以降では簡単のため $d_K = d_K^1$ として話を進めよう.

一般に $\text{id} : |K|_w \rightarrow |K|_m$ は常に連続となる. すなわち, $|K|_w$ のほうが位相は強い. 二つの位相が一致するための必要十分条件として次が知られている.

事実. $|K|_w = |K|_m \iff K$ は局所有限.

上の事実が必要十分条件であることから, $|K|_w \neq |K|_m$ となる例は局所有限でない最も簡単な例, つまり無限個の点を持つヘッジホッグを考えてみればよい. また, $|K|_w$ と $|K|_m$ の位相が一致しない場合でも, 常にホモトピー型は一致することが知られている.

2. 単体的複体とその細分

さて、 K の単体的細分 K' を考え、その位相を比較してみよう。

事実. 細分に関して次が知られている。

- $|K|_w = |K'|_w$,
- $\text{id} : |K'|_m \rightarrow |K|_m$ は連続,
- $|K|_m = |K'|_m$ とは限らない,
- 重心細分 $K' = \text{Sd } K$ については $|K|_m = |\text{Sd } K|_m$.

したがって多面体における距離位相は細分との相性が悪く、距離空間の範疇で議論を行う場合は、細分された多面体の位相がいかなるものか考察しなければならない。とくに連続写像の近似問題などで重心細分による代用が利かない場合、位相を保つような細分を上手く見つける必要があれば、次のような問題に直面するだろう。

問題. $|K|_m = |K'|_m$ となるための条件は何か?

この問題の一つの解答として、次の結果が知られている。

定理 (D. W. Henderson [1]). $|K|_m = |K'|_m$ となるための必要十分条件は、 K' の任意の頂点 v の開スター $O(v, K') = \{x \in |K| : \beta_v^{K'}(x) > 0\}$ が $|K|_m$ で開集合となることである。

しかしながら、この定理を直接応用するのは難しいことが多い。それは $O(v, K')$ が開集合になることを示す際に、結局二つの距離 $d_K(x, y)$ と $d_{K'}(x, y)$ の関係をすべての $x, y \in |K|$ に対して考察する必要があり、ほとんど定義に戻って考えているのと変わらない可能性があるからである。そこで我々は次のような、より判定しやすい必要十分条件を与えた。

主結果 (酒井・嶺 [2]). $|K|_m = |K'|_m$ となるための必要十分条件は、 K' の頂点集合 $K'^{(0)}$ が $|K|_m$ で離散集合となることである。

ところで、今回の研究を進めている間に次のような一見すると奇妙な細分が存在することに気づいた (構成方法は極めて簡単である)。

例. K を無限次元かつ位相等質な、ある単体的複体とする。¹ K の細分 K' で、 K' は単体的複体として $\text{Sd } K$ と同型かつ $K'^{(0)}$ が $|K|_m$ で稠密となるものが存在する。

この例において、 $\text{cl}_{|K|_m} K'^{(0)} = |K|_m$ であるから、我々の主結果を踏まえれば K' は位相を保つかどうかという点では極めて行儀が悪いのであるが、単体的複体の構造自体は重心細分と同型なので、そんなに複雑ではない。また、すでに述べたように $|K|_m = |\text{Sd } K|_m$ であることも思

¹可算無限個の頂点を持つ充満な単体的複体を考えよ。すなわち、 K の任意有限個の頂点 v_1, \dots, v_n に対して、これらで張られる n -単体 $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$ が常に K に含まれるような単体的複体のことである。

い出してもらいたい。つまり、 $|K|_m$ と $|K'|_m$ は位相空間として同型 (同相) なのである。このような例の構成から次のような疑問が自然と生じるが、未だ解決していない。

問題. K の任意の細分 K' に対して、 K' と単体的複体として同型かつ $|K|_m = |K''|_m$ となるような K の細分 K'' は存在するか?

上述の問題よりもやや弱い関連問題として、次も未解決である。

問題. 単体的複体 K と L が組み合わせ同型、すなわち、それぞれの細分で互いに単体的複体として同型になるものが存在するとき、それぞれの距離位相を保つ細分でそのようなものが存在するか?

さらに弱い、次の問題も考えられよう。

問題. K の任意の細分 K' に対して、 $|K|_m$ と $|K'|_m$ は同相か?

REFERENCES

- [1] D.W. Henderson, *Z-sets in ANR's*, Trans. Amer. Math. Soc. **213** (1975), 205–216.
- [2] K. Mine and K. Sakai, *Subdivisions of simplicial complexes preserving the metric topology*, preprint.