

# 多様体となる無限次元空間の位相について

嶺 幸太郎 (筑波大学大学院数理物質科学研究科)

本講演では、線形位相空間をモデル空間とする無限次元位相多様体論を概説するという形を通して、筆者がこれまで行ってきた研究について報告する。

なお、位相空間はすべてハウスドルフであるとする。また、とくに断りが無い限り、距離づけ可能な空間と距離空間を区別せずに扱う。

## 1. 無限次元多様体のモデル空間

まず、 $E$ -多様体と呼ばれる概念を定義する。

定義.  $E$  を位相空間とする。各点が、 $E$  の開集合と同相な近傍を持つようなパラコンパクト空間<sup>1</sup>を  $E$ -多様体と定義し、 $E$  を多様体のモデル空間と呼ぶ。

つまり、 $n$ -次元多様体と  $\mathbb{R}^n$ -多様体は同値である。モデル空間  $E$  がどんな空間であろうとも  $E$ -多様体という概念が定義できるが、ここでは  $E$  として無限次元空間、とくに線形位相空間となるものを主に考える。<sup>2</sup> その中でも重要なのはモデル空間としてフレシェ空間<sup>3</sup>を採用する場合である。

### 1.1. ヒルベルト多様体.

フレシェ空間の例としては、ヒルベルト空間やバナッハ空間などが挙げられるだろう。次の定理によると、フレシェ多様体を考える上でのモデル空間はヒルベルト空間のみを考えればよいことが分かる。

定理 1.1 (Kadec-Anderson). 稠密度<sup>4</sup>の等しい無限次元フレシェ空間はすべて同相 ( $\approx$ ) である。<sup>5</sup>

<sup>1</sup>任意の開被覆が局所有限な開被覆による細分を持つ位相空間をパラコンパクト空間と呼ぶ。距離空間はパラコンパクト空間である。

<sup>2</sup>ヒルベルト立方体  $Q = [0, 1]^{\mathbb{N}}$  による  $Q$ -多様体も部分的に紹介する。不動点定理により  $Q$  は線形位相空間には成り得ない。

<sup>3</sup>完備距離づけ可能な局所凸線形位相空間をフレシェ空間 (Fréchet space) と呼ぶ。

<sup>4</sup>位相空間  $X$  の稠密部分集合の最小濃度を  $X$  の稠密度と言う。

<sup>5</sup>非可分な場合を含めた証明は [27] にある。

以下,  $\tau$  を無限濃度, 稠密度  $\tau$  の無限次元ヒルベルト空間を  $l_2(\tau) = \{ (x_t)_{t \in \tau} \in \mathbb{R}^\tau \mid \sum_{t \in \tau} x_t^2 < \infty \}$  とし, とくに可分な場合について  $l_2(\mathbb{N}_0)$  を  $l_2$  と略記する.  $l_2(\tau)$ -多様体について次が成り立つ (Henderson-Schori[14]).

定理 1.2. 任意の連結な  $l_2(\tau)$ -多様体は開部分空間として  $l_2(\tau)$  自身に埋め込める.

定理 1.3. 連結な  $l_2(\tau)$ -多様体どうしが同相であるための必要十分条件はホモトピー同値となることである.

定理 1.4. 任意の連結な  $l_2(\tau)$ -多様体  $M$  には,  $M \approx |K| \times l_2(\tau)$  となるような局所有限次元多面体  $|K|$  が存在する. ここで,  $|K|$  の位相は距離位相によるものとする.

無限次元多様体のモデル空間の候補を考える場合, 上述の定理群に類似するような良い性質を満たす多様体であることが望ましい. 例えば, ノルム空間  $E$  が  $E \approx E^{\mathbb{N}}$  または  $E \approx E_f^{\mathbb{N}}$  を満たすならば, 定理 1.2 及び 1.3 と同様の性質が  $E$ -多様体においても成立することが知られている. ここで,  $E_f^{\mathbb{N}}$  は基点  $* \in E$  に関する  $\sigma$ -積を表す.<sup>6</sup>

次に, 普遍空間としての  $l_2(\tau)$ -多様体の特徴づけを述べよう. ある位相空間のクラス  $\mathcal{C}$  に対して, 位相空間  $X$  が  $\mathcal{C}$  の普遍空間であるとは,  $\mathcal{C}$  の任意の元が  $X$  に埋め込めることとする. ところがこの定義は若干曖昧で, 正確には, より強い意味での定義が必要となる.<sup>7</sup> 議論の深追いを避けるため定義の詳細は省くが, 次の定理を見れば, 完備距離空間の“ある意味”での普遍空間として  $l_2(\tau)$ -多様体の特徴づけられることが分かるだろう.

定理 1.5 (Toruńczyk [27]). 完備距離 ANR 空間  $M$  が  $l_2(\tau)$ -多様体となるための必要十分条件は, 稠密度  $\tau$  以下の任意の完備距離空間  $X$  に対して,  $X$  から  $M$  への任意の連続写像が閉埋蔵写像で近似できることである.<sup>8</sup>

ANR については次項で説明する.

## 1.2. ANR と ANE.

定理 1.5 から分かるように, 無限次元位相多様体論では, 空間が ANR であることを前提として議論を進めることが多い.

定義. 距離空間  $X$  が ANR (absolute neighborhood retract) であるとは,  $X$  を閉集合として含む任意の距離空間  $Y$  に対して,  $Y$  における  $X$  の近傍  $U$  およびレトラクション  $r : U \rightarrow X$  (すなわち  $r|_X = \text{id}_X$ ) が存在することである. とくに  $U$  として常に  $Y$  が取れるとき,  $X$  は AR (absolute retract) であると言う.

<sup>6</sup>つまり  $E_f^{\mathbb{N}} = \{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}} \mid \text{有限個の } n \in \mathbb{N} \text{ を除いて } x_n = * \}$  である.

<sup>7</sup>例えば, 普遍空間自身は  $\mathcal{C}$  に属するべきか, 埋め込みによる像は閉集合になり得るか, より特別な埋め込みがあるかといった様々な要請に応じて, 普遍空間の定義がいくつかある.

<sup>8</sup>論文 [27] における主張では  $Z$ -埋蔵写像で近似できるという条件であったが, 定理 1.5 の状況下では閉埋蔵写像による近似条件と同値になることが知られている.

距離空間において, ANR(AR) は次で定義される ANE(AE) と同値 (すなわち, ANR  $\Leftrightarrow$  距離づけ可能な ANE) である事が知られている. ( $\Leftarrow$ ) は定義より直ちに分かるが, ( $\Rightarrow$ ) を示すには, 任意の距離空間には自らを閉集合として埋め込めるノルム空間 (これは AE である) が存在することをを用いる.

定義. 位相空間  $X$  が ANE (absolute neighborhood extensor) であるとは, 任意の距離空間  $Y$  およびその閉集合  $A$ , 連続写像  $f : A \rightarrow X$  に対して,  $Y$  における  $A$  の近傍  $U$  および  $f$  の連続な拡張  $\tilde{f} : U \rightarrow X$  (すなわち  $\tilde{f}|_A = f$ ) が存在することである. とくに  $U$  として常に  $Y$  が取れるとき,  $X$  は AE (absolute extensor) であると言う.

ANE の有限積空間は ANE, AE の積空間は AE である. 局所凸線形位相空間は AE であり, その凸部分空間は ANE であることが知られている. また, 局所的に ANE なパラコンパクト空間は ANE である. したがって, モデル空間  $E$  が ANE ならば,  $E$ -多様体も ANE となる. 本講演で考えるモデル空間はすべて ANE である.

ANE との同値性を用いると, ANR ならば局所可縮であることが分かる. 一般には逆は成り立たないが, 有限次元<sup>9</sup>ならば逆も成り立つ.

### 1.3. 完備距離が入らないモデル空間.

完備距離が入らない多様体にも  $\ell_2(\tau)$ -多様体と似たような特徴づけがある. まず, 次に挙げるような, いくつかの位相的クラスに対する普遍空間を考えよう. ここで,  $\ell_2^f = \{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_2 \mid \text{有限個の } n \in \mathbb{N} \text{ を除いて } x_n = 0 \}$ ,  $Q = [0, 1]^{\mathbb{N}}$  とする.

- $\ell_2^f$  —  $\sigma$ -有限次元コンパクト距離空間の普遍空間.
- $\ell_2^f \times Q$  —  $\sigma$ -コンパクト距離空間の普遍空間.
- $\ell_2 \times \ell_2^f$  — 可分な  $\sigma$ -完備距離空間の普遍空間.

こういった空間をモデル空間とする多様体も, 次の定理によって “ある種” の普遍空間として特徴づけることができる. 各用語の詳細は, いくつかの定義が繁雑なため省略するが, まず, モデル空間として吸収的集合 (absorbing set) と呼ばれる特別な普遍空間を定義し, “強普遍” という概念を用いることで多様体の特徴づけを与えているわけである.

定理 1.6 (Theorem 2.5 of [17]). 閉集合に関する有限和や遺伝性で閉じた位相的クラス  $\mathcal{C}$  が任意の  $n \in \mathbb{N}$  について  $\tau$  個の  $n$  次元立方体の直和空間を含むとする. このとき,  $\mathcal{C}$  に関する  $\ell_2(\tau)$  の吸収的集合を  $E$  とすれば, ANR 空間  $X$  が  $E$ -多様体となるための必要十分条件は  $X$  が  $\mathcal{C}$  に関して強普遍的な強  $Z_\sigma$  空間であり, かつ  $X \in \mathcal{C}_\sigma$  となることである.

<sup>9</sup>可算次元 (有限次元空間の可算和で表わせる空間), あるいは, より一般に距離づけ可能な  $C$ -空間でもよい [12].

さて、ここで、開集合 (閉集合) の可算共通部分 (可算和) で書ける集合を  $G_\delta$ -集合 ( $F_\sigma$ -集合) と呼び、いかなる距離空間に埋め込んでも、その空間の中で  $G_\delta$ -集合 ( $F_\sigma$ -集合) となるような距離空間を絶対  $G_\delta$ -空間 (絶対  $F_\sigma$ -空間) と呼ぶことにしよう。完備距離空間が絶対  $G_\delta$ -空間と同値である事はよく知られている事実である。コンパクト距離空間は絶対閉-空間であり、更に、 $\sigma$ -コンパクト距離空間は可分な絶対  $F_\sigma$ -空間と同値になる。蛇足ではあるが、絶対開-空間は空集合のみである。

先に挙げた普遍空間の例とこれらの事実を合わせた一般化を考えることで、Bestvina-Mogilski[6] は、可分な絶対ボレル空間<sup>10</sup>の各ボレル階層に対する普遍空間が存在することを示した。更に、Sakai-Yaguchi[25] や筆者[17] の研究により、非可分な絶対ボレル空間に対しても同等の事実が証明され、これらの普遍空間をモデルとする多様体も定理 1.2 や 1.3, 1.4 にあるような性質を満たすことが分かっている。

また、可分な空間については、解析集合<sup>11</sup>やその補集合、それらの一般化である射影集合の各階層に対する普遍空間の存在が Cauty[7] により得られている。

#### 1.4. LF-空間と箱位相.

次に、距離づけ不可能なモデル空間の例として、LF-空間と呼ばれる線形位相空間を挙げる。LF-空間とは、次で定義される、局所凸線形位相空間におけるフレシェ空間の帰納的極限 (inductive limit) のことである。

定義. フレシェ空間の増大列  $F_1 \subsetneq F_2 \subsetneq F_3 \subsetneq \dots$  に対して、各  $F_n$  から  $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$  への自明な写像が連続となるような  $F$  の局所凸線形位相空間の位相の中で最強のものを導入した局所凸線形位相空間  $F$  を LF-空間と呼び、 $\text{ind-lim } F_n$  と書く。

注意したいのは、位相空間における帰納的極限  $\varinjlim F_n$ <sup>12</sup> と  $\text{ind-lim } F_n$  の位相は一般には一致せず、 $\varinjlim F_n$  のほうが強いということである。二つの位相が一致するための必要十分条件は各  $F_n$  が局所コンパクト (すなわち有限次元) となることであり、実際、局所コンパクトでない  $F_n$  が一つでもあると和の操作が  $\varinjlim F_n$  では連続にならず、したがって  $\varinjlim F_n$  は位相群にすらならない。

LF-空間は、積集合に“箱位相”と呼ばれる特殊な積位相を入れた空間の部分空間と見ることができる。

<sup>10</sup>いかなる距離空間に埋め込んでも、その空間の中でボレル集合となるような距離空間を絶対ボレル空間 (absolute Borel space) と呼ぶ。

<sup>11</sup>無理数空間  $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  の連続像となる距離空間を analytic set (解析集合) と言い、可分完備距離空間における analytic subset の補集合を coanalytic set と言う。更に、coanalytic set の連続像となる距離空間を... というようにして、帰納的に射影集合 (projective set) の階層が定義されていく。analytic かつ coanalytic な空間全体は、ちょうど絶対ボレル空間全体と一致する。

<sup>12</sup> $U \subset \varinjlim F_n$  が開集合であることを、各  $U \cap F_n$  が  $F_n$  の開集合であることと定義する位相のこと。

定義. 積集合  $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$  において, 集合族  $\{\prod_{n \in \mathbb{N}} U_n \mid U_n \text{ は } X_n \text{ の開集合}\}$  で生成される位相を箱位相と呼び, この箱位相空間を  $\square X_n$  と書く. 更に, 基点  $*_n \in X_n$  に対して定義される部分空間  $\square X_n = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \square X_n \mid \text{有限個の } n \in \mathbb{N} \text{ を除いて } x_n = *_n\}$  を弱箱位相空間と呼ぶ.

記号の簡略化のために上の定義は可算無限積に限っているが, 本来は任意の積集合について定義されるものである. 弱箱位相空間は集合としては  $\sigma$ -積と等しい. 有限積の場合, 箱位相空間および弱箱位相空間は通常の積位相空間と一致する. 本講演では  $X_n$  として主に線形空間を考えるので, 基点  $*_n$  は原点とする.

箱位相空間の位相は複雑で,  $\square l_2$  ですら正規空間にはならず, 連結でも局所連結でもなく, 特に線形位相空間ではない. しかしながら, その部分空間である弱箱位相空間は比較的良いふるまいをする. 実際, フレシェ空間の有限積による増大列,

$$F_1 \subset F_1 \times F_2 \subset F_1 \times F_2 \times F_3 \subset \cdots,$$

に関する LF-空間は弱箱位相空間に一致する:

命題 1.7.  $\text{ind-lim} \prod_{i=1}^n F_i = \square F_n$ . とくに,  $\varinjlim \mathbb{R}^n = \text{ind-lim} \mathbb{R}^n = \square \mathbb{R}$ .

Mankiewicz によれば, 稠密度が等しい LF-空間の位相は 2 種類以下に分類される:

定理 1.8 (Mankiewicz[16]). 可分な LF-空間は,  $\square l_2$  および  $\square \mathbb{R}$  のいずれかと同相になる. 更に, 稠密度が非可算濃度  $\tau$  の LF-空間は,  $\square l_2(\tau)$  および  $\square l_2(\tau_n)$  のいずれかと同相になる. ここで, 各  $\tau_n$  は  $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3 < \cdots$  および  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \tau_n = \tau$  を満たす濃度とする.<sup>13</sup>

系 1.9. 任意の無限濃度  $\tau$  について,  $\square l_2(\tau) \approx l_2(\tau) \times \square \mathbb{R}$ .

したがって, LF-空間をモデル空間とする多様体 (以下, これを総称して LF-多様体と呼ぶ) を考える場合, 位相的には 2 種類のモデル空間のみを考えればよい.  $\square \mathbb{R}$ -多様体については, Heisey[13] や Sakai[23] の研究によって定理 1.2 や 1.3, 1.4 と同等の性質が成り立つことが分かっている. それ以外の LF-多様体についてはそこまでは分かっていないが, LF-空間の開部分空間に対して次が得られている.

定理 1.10 (M-Sakai[18]).  $\square l_2(\tau)$  の開部分空間どうしが同相であるための必要十分条件はホモトピー同値となることである.

定理 1.11 (M-Sakai[19]). LF-空間  $F$  の任意の開部分空間  $U$  には,  $U \approx |K| \times F$  となるような局所有限次元多面体  $|K|$  が存在する. ここで,  $|K|$  の位相は距離位相によるものとする.

<sup>13</sup>濃度の列  $\tau_n$  の取り方によらずに  $\square l_2(\tau_n)$  の位相は決まる.

## 2. いくつかの無限次元多様体の例

与えられた多様体の性質を研究することは重要であるが、位相空間がいかなる条件を満たせば多様体となり得るかという問題もまた興味深い。前節では、やや天下りの無限次元多様体のモデル空間を紹介してしまった。それでは実際に、どのような数学的対象が、これらをモデル空間とする多様体になり得るのであろうか。

実は、1854年に Riemann[21] が多様体の概念を提唱した際、無限次元多様体の存在について次のように言及している。<sup>14</sup>

“位置の規定が有限個の量規定ではなく、無限数列をなす量規定、あるいは連続多様体をなす量規定を要求するような多様体もある。そのような多様体をなすのは、例えば、ある与えられた領域に対する[この領域を定義域とする]関数の可能な規定や、空間図形の可能な形などである。”

つまり、無限次元多様体の候補には、関数の空間や図形の空間が容易に挙げられるわけである。それ以外の例を考えるならば、筆者は、普遍空間として定義される空間の多様体性が思いつくが、これについては既に前節で述べている。本節では、図形の空間として冪空間を、関数の空間として連続関数空間を、一体どのような条件の下で多様体になるのか考察する。

### 2.1. 冪空間.

本項では、位相空間  $X$  は2点以上からなる集合とし、 $X$  の閉集合全体を  $\text{Cld}(X)$  で表す。また、その部分集合として  $X$  のコンパクト集合全体を  $\text{Comp}(X)$ 、 $X$  の有限集合全体を  $\text{Fin}(X)$  と書こう。今回は紹介できないが、これ以外にも有界閉集合全体や凸閉集合全体、ペアノ連続体<sup>15</sup>全体などを考える場合もある。

ヴィエトリス位相をはじめとして、 $\text{Cld}(X)$  にはいくつかの位相が定義されている。ここではハウスドルフ距離による位相を導入しよう。

定義. 距離空間  $(X, d)$  に対して、次で定義される  $\text{Cld}(X)$  における距離  $d_H$  をハウスドルフ距離と呼ぶ。

$$d_H(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid B \subset N(A, \varepsilon) \text{ かつ } A \subset N(B, \varepsilon)\}.$$

ここで、 $N(A, \varepsilon)$  は集合  $A$  の  $\varepsilon$ -開近傍を表す。

ハウスドルフ距離による位相は、 $X$  の距離  $d$  に依存する点に注意したい。つまり、 $(X, d) \approx (X, d')$  だからといって  $(\text{Cld}(X), d_H) \approx (\text{Cld}(X), d'_H)$  とは限らないということである。なお、部分空間  $\text{Comp}(X)$  については距離によらずに位相が決まる。

<sup>14</sup>引用中の下線部は嶺によるもので、邦訳は [22] による。

<sup>15</sup>閉区間  $\mathbf{I} = [0, 1]$  の連続像となる空間をペアノ連続体と言う。これは局所連結な連結コンパクト距離空間と同値である。

冪空間の多様体性に関する有名な結果としては、例えば次の定理が挙げられよう。冪空間は多様体になるというよりも、モデル空間そのものになることが多い。

定理 2.1 (Curtis-Schori[11]).  $\text{Comp}(X)$  が  $Q$  と同相であるための必要十分条件は  $X$  がペアノ連続体となることである。

定理 2.2 (Curtis[8]).  $\text{Comp}(X)$  が  $\ell_2$  と同相であるための必要十分条件は  $X$  が局所連結な連結完備距離空間であり、かつ  $X$  の各点がコンパクトな近傍を持たないことである。

$(X, d)$  がコンパクトでない場合は  $\text{Cld}(X)$  の位相的分類はよく分かっておらず、とくに完備距離空間でない場合は  $\text{Comp}(X)$  ですら扱いが難しい。例えば、 $X$  が  $\sigma$ -コンパクトな場合でも  $\text{Comp}(X)$  は絶対ボレル空間ではない：

命題 2.3 (Banach-Cauty[2]).  $\text{Comp}(\ell_2^f)$  は coanalytic クラスの普遍空間  $\Pi_2$  と同相である。<sup>16</sup>

有限部分集合による冪空間については次が知られている。

定理 2.4 (Curtis-Nhu[10]).  $\text{Fin}(X)$  が  $\ell_2^f$  と同相であるための必要十分条件は  $X$  が局所連結な連結  $\sigma$ -コンパクト・強可算次元<sup>17</sup>距離空間となることである。

$X$  のボレル階層が高くなると  $\text{Fin}(X)$  の特徴づけを探すのは難しく、定理 2.4 のような綺麗な結果は得られていない。それでも特定の位相空間に関する冪空間の位相的決定は興味深く、例えば、 $\text{Fin}(Q) \approx \text{Fin}(\ell_2^f \times Q) \approx \ell_2^f \times Q$  (Curtis[9]),  $\text{Fin}(\ell_2(\tau)) \approx \ell_2(\tau) \times \ell_2^f$  (Yaguchi[30]) などが得られている。更に、 $X$  をある位相的クラスの普遍空間と見なし一般化することで次を得る。

定理 2.5 (M-Sakai-Yaguchi[20]).  $E$  を 1.3 項で挙げた完備距離づけ可能でない普遍空間とし、 $M$  を連結な  $E$ -多様体とする。このとき  $\text{Fin}(M)$  は  $E$  と同相である。

## 2.2. 連続関数空間.

位相空間  $X$  から  $Y$  への連続写像全体を  $C(X, Y)$  で表す。  $C(X, Y)$  の位相としては、コンパクト開位相や一様収束位相, limitation 位相, グラフ位相などいくつか与えられており、各位相の強弱は次のようになっている (ただし、一様収束位相は  $Y$  が距離空間のときに定義される位相である)：

コンパクト開位相  $\subset$  一様収束位相  $\subset$  limitation 位相  $\subset$  グラフ位相.

<sup>16</sup>Banach-Cauty[2] は必要十分条件も与えている。すなわち、 $\text{Comp}(X) \approx \Pi_2 \Leftrightarrow X$  は第 1 類かつ局所・連続体-連結な連結 coanalytic set. ここで、距離空間  $X$  が連続体-連結 (continuum-connected) であるとは、 $\{x, y\}$  を含む  $X$  の連結コンパクト部分集合 (連続体) の存在が任意の 2 点  $x, y \in X$  について言えることである。更に、連続体-連結な部分集合による開基を持つ空間を局所・連続体-連結 (locally continuum-connected) であると定義する。

<sup>17</sup>有限次元閉部分空間の可算和で書ける空間を強可算次元空間と言う。

これらの位相は,  $X$  がコンパクトでない場合に本質的に意味を持つ. すなわち, 定義域  $X$  がコンパクトならば四つの位相はすべて一致する.

### 2.2.1. コンパクト開位相.

定義.  $X$  のコンパクト部分集合  $K$  および  $Y$  の開集合  $U$  を動かして定義される集合たち  $[K, U] = \{f \in C(X, Y) \mid f(K) \subset U\}$  によって生成される  $C(X, Y)$  上の位相をコンパクト開位相と言う.

定義域  $X$  が局所コンパクトであると集合  $[K, U]$  による情報量は豊かになり, コンパクト開位相は位相的に扱いやすい.  $X$  や  $Y$  を最も一般化した場合における  $C(X, Y)$  の多様体性については次の定理がある.

定理 2.6 (Sakai [24]). 有限集合でないコンパクト距離空間  $X$  および孤立点を持たない可分完備距離 ANR 空間  $Y$  について,  $C(X, Y)$  はコンパクト開位相において  $\ell_2$ -多様体である.

$X$  がコンパクトでない場合は  $C(X, Y)$  の ANR 性が問題になる. 例えば,  $X$  が CW 複体の場合については Smrekar-Yamashita[26] を見よ.

### 2.2.2. 一様収束位相.

定義.  $(Y, d)$  を距離空間とする. 上限距離<sup>18</sup>  $d_S(f, g) = \sup\{d(f(x), g(x)) \mid x \in X\}$  で定義される  $C(X, Y)$  上の位相を一様収束位相と言う.

ハウスドルフ距離と同様に, この位相も  $Y$  の距離に依存することに注意したい.  $C(X, Y)$  の ANR 性を確保するために, 次の定理では,  $Y$  の条件に ANRU と呼ばれる性質を与えているが, ここでは概念の深入りはやめておこう.

定理 2.7 (Yamashita [31]). コンパクトでない可分距離空間  $X$  および可分完備距離 ANRU 空間  $Y$  に対して,  $Y$  の各連結成分の直径による下限が正数であるならば  $C(X, Y)$  は一様収束位相において  $\ell_2(2^{\aleph_0})$ -多様体となる.

### 2.2.3. Limitation 位相.

定義.  $Y$  の開被覆  $\mathcal{U}$  に対して,  $\{f(x), g(x)\} \subset U$  なる  $U \in \mathcal{U}$  の存在が任意の  $x \in X$  について言えるとき,  $f, g \in C(X, Y)$  は  $\mathcal{U}$  だけ近い ( $\mathcal{U}$ -close) と定義し,  $f$  と  $\mathcal{U}$  だけ近い  $g \in C(X, Y)$  の全体を  $\mathcal{U}(f)$  で表す. 集合族  $\{\mathcal{U}(f) \mid \mathcal{U} \text{ は } Y \text{ の開被覆}\}$  を各  $f \in C(X, Y)$  の近傍基とするような  $C(X, Y)$  の位相を limitation 位相と言う.

---

<sup>18</sup>無限大の値も許す距離である.

連続関数による近似と言え、一様収束位相か limitation 位相による近似を意味するのが一般的であろう。例えば、定理 1.5 の近似は limitation 位相によるものである。つまり、定理 1.5 の必要十分条件は閉埋蔵写像全体が limitation 位相において  $C(X, M)$  の中で稠密となることと同値である。

$Y$  が距離空間かつ  $f \in C(X, Y)$  が定数関数である場合、 $f$  の近傍は一様収束位相による近傍と一致し、ゆえに  $f$  は可算近傍基を持つ。ところが、 $f$  が同相写像である場合、 $f$  は可算近傍基を持たないことが分かる（詳しくは定理 2.11 の後で述べる）。したがって、 $X = Y = \mathbb{R}$  の場合ですら  $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  は多様体になり得ない。

#### 2.2.4. グラフ位相.

次で定義されるグラフ位相は、0 階連続的微分可能な関数におけるホイットニー位相とも見なせる。

定義. 各  $f \in C(X, Y)$  に対して、 $f$  のグラフを  $\Gamma_f = \{ (x, f(x)) \in X \times Y \mid x \in X \}$  とする。更に、 $X \times Y$  の部分集合  $U$  に対して、グラフが  $U$  に含まれるような連続関数全体を  $\Gamma_U$  で表す。グラフ位相とは、集合族  $\{ \Gamma_U \mid U \text{ は } X \times Y \text{ の開集合} \}$  で生成される  $C(X, Y)$  上の位相のことである。

この位相は箱位相と相性が良く、例えば空間の連結性についてその様子が見て取れる。まず、次のような  $\square\mathbb{R}$  の部分集合  $U$  を考えると、

$$U = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \square\mathbb{R} \mid \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \right\},$$

これは原点  $(0, 0, 0, \dots) \in \square\mathbb{R}$  の clopen な近傍であり、 $U$  は  $(1, 1, 1, \dots) \in \square\mathbb{R}$  を含まない。ゆえに、 $\square\mathbb{R}$  は不連結である。さて、

$$U' = \left\{ f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = 0 \right\},$$

とすると、 $U'$  も原点（すなわち定数関数  $g = 0$ ）の clopen な近傍であり、 $g$  以外の定数関数を含まない。したがって、 $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  もまた不連結となる。連結成分を記述するために定義を続けよう。

基点  $* \in Y$  に関する  $f \in C(X, Y)$  の台 (support) を次で定義する:

$$\text{supp } f = \text{cl}\{ x \in X \mid f(x) \neq * \}.$$

台がコンパクトな関数全体からなる  $C(X, Y)$  の部分空間を  $C_c(X, Y)$  と書くことにすると、次の命題が成り立つ。

命題 2.8.  $\square\mathbb{R}$  の原点の連結成分は  $\square\mathbb{R}$  に一致し、 $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  のグラフ位相における原点の連結成分は  $C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  に一致する。

$Y$  が群構造を持つ場合について、 $C_c(X, G)$  が LF-多様体となることを筆者らは示した:

定理 2.9 (Banakh-M-Sakai-Yagasaki [5]). コンパクトでない局所コンパクト可分距離空間  $X$  および可分完備距離 ANR 位相群  $G$  に対して, グラフ位相による関数空間のペア  $(C(X, G), C_c(X, G))$  は, ヒルベルト空間の箱位相空間と弱箱位相空間のペアと局所的に同相である. とくに  $C_c(X, G)$  は LF-多様体である.

### 2.3. 連続関数空間の部分空間.

ところで,  $C(X, Y)$  には部分空間がいくつかある. 例えば  $X = Y = \mathbb{R}$  の場合に限っても, 有界関数空間や PL 写像空間, 微分可能関数空間, 多項式空間など様々な部分空間が考えられよう. 更には, 定理 2.9 にあるように, 全空間  $C(X, Y)$  への埋め込まれ方を熟慮する研究もあり, そのすべてを網羅することは難しい. 今回は, 特別な部分空間として同相群の研究の一部を報告する.

#### 2.3.1. 同相群予想.

位相空間  $X$  に対して,  $X$  の同相写像全体からなる群  $H(X)$  を  $X$  の同相群と呼ぶ.  $C(X, X)$  の部分空間として  $H(X)$  には様々な位相が入る. 一般に, 各位相において,  $H(X)$  が位相群になるための必要十分条件を見つけるのは容易ではない. しかしながら, 後述する同相群はすべて位相群である.

さて, 同相群の多様体性についてであるが, 実はその証明は困難を極め, とくに ANR 性を示すのが難しく,  $X$  がコンパクト多様体の場合ですら分かっていない. 次は Homeomorphism group problem と呼ばれる未解決問題である.

問題.  $n$  次元立方体  $I^n$  ( $n \geq 3$ ) の同相群  $H(I^n)$  は ANR 空間であるか?

なお, 2 次元以下の多様体については同相群の多様体性が示されている:

定理 2.10 (Luke-Mason[15]). コンパクト 2 次元多様体の同相群は  $\ell_2$ -多様体である.

また, コンパクト開位相の場合については, コンパクトでない連結 2 次元多様体の同相群が  $\ell_2$ -多様体となるための必要十分条件が Yagasaki[28] により得られており, その連結成分の位相的分類も完了している (Yagasaki[29]).

#### 2.3.2. グラフ位相における同相群.

グラフ位相に関する同相群の研究は比較的最近になってから始まったものである. 台がコンパクトな同相写像による部分群を  $H_c(X)$  と書こう. ただし, 同相写像  $h$  の台は次で定義される集合で, 連続関数版との違いに注意したい:

$$\text{supp } f = \text{cl}\{x \in X \mid f(x) \neq x\}.$$

まず, Banakh により次が示された.

定理 2.11 (Banakh[1]). グラフ位相について  $H_c(\mathbb{R}) \approx \square\ell_2$

実は, グラフ位相と limitation 位相は同相群に限ると一致することが分かる.  $\square\ell_2$  は第 1 可算公理を満たさない空間であるから, したがって, limitation 位相における  $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  上の同相写像も可算近傍基を持たないのである.

項 2.2.4 で述べた通りグラフ位相は箱位相空間と相性が良かった. これに対して, コンパクト開位相は通常の積位相空間と相性が良い. その事実を象徴するのが次に紹介する定理である.  $\Gamma$  を 1 次元多面体 (すなわちグラフ) とし,  $\Gamma$  の位相はホワイトヘッド弱位相とする. 向きを保つ<sup>19</sup>同相写像による部分群を  $H_+(\Gamma)$  と書き,  $H_0(\Gamma) = H_+(\Gamma) \cap H_c(\Gamma)$  と定義する.

定理 2.12 (Banakh-M-Sakai[3]). コンパクトでない連結 1 次元多面体  $\Gamma$  について次が成立する:

- コンパクト開位相について  $(H_+(\Gamma), H_0(\Gamma)) \approx (\ell_2^{\mathbb{N}}, \ell_{2f}^{\mathbb{N}})$ ,
- グラフ位相について  $(H_+(\Gamma), H_0(\Gamma)) \approx (\square\ell_2, \square\ell_2)$ .

最後に, 定理 2.11 の 2 次元への拡張に関する結果を述べよう.

定理 2.13 (Banakh-M-Sakai-Yagasaki[4]). コンパクトでない連結 2 次元多様体  $X$  のグラフ位相による同相群のペア  $(H(X), H_c(X))$  は箱位相空間のペア  $(\square\ell_2, \square\ell_2)$  と局所的に同型である. とくに  $H_c(X)$  は LF-多様体である.

## REFERENCES

- [1] T. Banakh, *On hyperspaces and homeomorphism groups homeomorphic to products of absorbing sets and  $\mathbb{R}^\infty$* , Tsukuba J. Math. **23** (1999) 495–504.
- [2] T. Banakh and R. Cauty, *Hyperspaces of nowhere topologically complete spaces*, Mat. Zametki **62** (1997), 35–51; translation in Math. Notes **62** (1997), 30–43 (1998).
- [3] T. Banakh, K. Mine and K. Sakai, *Box products and homeomorphism groups of infinite graphs*, preprint.
- [4] T. Banakh, K. Mine, K. Sakai and T. Yagasaki, *Homeomorphism and diffeomorphism groups of non-compact manifolds with the Whitney topology*, arXiv:0802.0337.
- [5] T. Banakh, K. Mine, K. Sakai and T. Yagasaki, *Spaces of maps into topological group with the Whitney topology*, arXiv:0904.1458.
- [6] M. Bestvina and J. Mogilski, *Characterizing certain incomplete infinite-dimensional absolute retracts*, Michigan Math. J. **33** (1986), 291–313.
- [7] R. Cauty, *Ensembles absorbants pour les classes projectives*, Fund. Math. **143** (1993), 203–206
- [8] D.W. Curtis, *Hyperspaces homeomorphic to Hilbert space*, Proc. Amer. Math. Soc. **75** (1979), 126–130.
- [9] D.W. Curtis, *Hyperspaces of finite subsets as boundary sets*, Topology Appl. **22** (1986), 97–107.

---

<sup>19</sup> $h \in H(\Gamma)$  が向きを保つとは,  $\Gamma$  に如何なる向き付けを行っても  $h$  が有向グラフ自己同型を誘導することと定義する.

- [10] D.W. Curtis and Nguyen To Nhu, *Hyperspaces of finite subsets which are homeomorphic to  $\aleph_0$ -dimensional linear metric spaces*, *Topology Appl.* **19** (1985), 251–260.
- [11] D.W. Curtis and R.M. Schori, *Hyperspaces of Peano continua are Hilbert cubes*, *Fund. Math.* **101** (1978), 19–38.
- [12] J.H. Gresham, *A class of infinite-dimensional spaces. II. An extension theorem and the theory of retracts*, *Fund. Math.* **107** (1980), 237–245.
- [13] R.E. Heisey, *Manifolds modelled on the direct limit of lines*, *Pacific J. Math.* **102** (1982), 47–54.
- [14] D.W. Henderson and R.M. Schori, *Topological classification of infinite-dimensional manifolds by homotopy type*, *Bull. Amer. Math. Soc.* **76** (1970), 121–124.
- [15] R. Luke and W.K. Mason, *The space of homeomorphisms on a compact two-manifold is an absolute neighborhood retract*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **164** (1972), 275–285.
- [16] P. Mankiewicz, *On topological, Lipschitz, and uniform classification of LF-spaces*, *Studia Math.* **52** (1974), 109–142.
- [17] K. Mine, *Universal spaces of non-separable absolute Borel classes*, *Tsukuba J. Math.* **30** (2006), 137–148.
- [18] K. Mine and K. Sakai, *Open subsets of LF-spaces*, *Bull. Polish Acad. Sci. Math.* **56** (2008), 25–37.
- [19] K. Mine and K. Sakai, *Simplicial complexes and open subsets of non-separable LF-spaces*, *Canad. J. Math.*, to appear
- [20] K. Mine, K. Sakai and M. Yaguchi, *Hyperspaces of finite sets in universal spaces for absolute Borel classes*, *Bull. Polish Acad. Sci., Math.*, **53** (2005), 409–419.
- [21] B. Riemann, *Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*, *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, **13**, (1867).
- [22] B. Riemann, 『リーマン論文集』(数学史叢書) 足立恒雄・杉浦光夫・長岡亮介編訳, 朝倉書店 (2004).
- [23] K. Sakai, *On  $\mathbb{R}^\infty$ -manifolds and  $Q^\infty$ -manifolds*, *Topology Appl.* **18** (1984), 69–79.
- [24] K. Sakai, *The space of cross sections of a bundle*, *Proc. Amer. Math. Soc.* **103** (1988), 956–960.
- [25] K. Sakai and M. Yaguchi, *Characterizing manifolds modeled on certain dense subspaces of non-separable Hilbert spaces*, *Tsukuba J. of Math.* **27** (2003), 143–159.
- [26] J. Smrekar and A. Yamashita, *Function spaces of CW homotopy type are Hilbert manifolds*, *Proc. Amer. Math. Soc.* **137** (2009), 751–759.
- [27] H. Toruńczyk, *Characterizing Hilbert space topology*, *Fund. Math.* **111** (1981), 247–262.
- [28] T. Yagasaki, *The homeomorphism groups of noncompact 2-manifolds*, *Mem. Fac. Engrg. Design Kyoto Inst. Tech. Ser. Sci. Tech.* **47** (1998), 41–48.
- [29] T. Yagasaki, *Homotopy types of homeomorphism groups of noncompact 2-manifolds*, *Topology Appl.* **108** (2000), 123–136.
- [30] M. Yaguchi, *Hyperspaces of finite subsets of non-separable Hilbert spaces*, *Tsukuba J. Math.* **30** (2006), 181–193
- [31] A. Yamashita, *Non-separable Hilbert manifolds of continuous mappings*, [arXiv:math.GN/0610214](https://arxiv.org/abs/math.GN/0610214).

Institute of Mathematics,  
 University of Tsukuba, Tsukuba, 305-8571, Japan  
[pen@math.tsukuba.ac.jp](mailto:pen@math.tsukuba.ac.jp)