解析学 I・微分積分学 I 演習問題 (関数の近似)

学籍番号________________ 氏名________________

約束. 関数 $f(x)$ の n 回微分を $f^{(n)}(x)$ で表す. 例えば $f''(x) = f^{(2)}(x)$ である. また $f^{(0)}(x)$ ($f(x)$ の 0 回微分) は, $f(x)$ 自身のこととする.

テイラーの定理 (教科書 p.68 定理 5.6). $n+1$ 回微分可能な関数 $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ が与えられているとする. このとき各点 $a, x \in (\alpha,\beta)$ に対して, 次を満たす $\theta = \theta(a,x,n)$ が a と x の間に存在する:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1},$$

$$\text{ここで,}\quad R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

← 覚える!

注意. 各項において f を何回か微分したものに a を代入しているが, 最後の項の R_{n+1} においてのみ, a とは少しだけずれた θ を代入している. この微調整により, 等式が成立するのである.

約束. $a = 0$ の場合のテイラーの定理を**マクローリンの定理**という.

応用 1. マクローリンの定理を用いて関数 $f(x)$ を 1 次の項まで展開すると,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + R_2, \qquad R_2 = \frac{f^{(2)}(\theta)}{2!}x^2. \quad (\text{ただし, } \theta \text{ は } x \text{ と } 0 \text{ の間にある数})$$

問題 1. $f(x) = \log(1+x)$ について, マクローリンの定理を用いて 1 次の項まで展開せよ. ($f(x) = \boxed{} + R_2$ の形にせよ).

$f(0) = \log 1 = 0$

$f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$

$f'(0) = \dfrac{1}{1+0} = 1$

$f''(x) = \dfrac{-1}{(1+x)^2}$

以上より,

$\log(1+x) = f(0) + f'(0)x + R_2$

$= 0 + 1\cdot x + R_2$

$= x + R_2$

ここで, $R_2 = \dfrac{f''(\theta)}{2!}x^2 = \dfrac{-1}{2(1+\theta)^2}x^2$

ただし, θ は x と 0 の間にある数.

この一文がぬけていると減点!!

応用 2. マクローリンの定理を用いて関数 $f(x)$ を 2 次の項まで展開すると,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + R_3, \qquad R_3 = \frac{f^{(3)}(\theta)}{3!}x^3.$$ （ただし, θ は x と 0 の間にある数）

問題 2. (1) $f(x) = \sin x$ について, マクローリンの定理を用いて 2 次の項まで展開せよ. ($f(x) = \boxed{} + R_3$ の形にせよ).

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \sin x & (n=4k) \\ \cos x & (n=4k+1) \\ -\sin x & (n=4k+2) \\ -\cos x & (n=4k+3) \end{cases}$$

$\left(= \sin\left(x + \frac{\pi}{2}n\right)\right)$ であるから.

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & (n=4k) \\ 1 & (n=4k+1) \\ 0 & (n=4k+2) \\ -1 & (n=4k+3) \end{cases}$$

以上より,

$$\sin x = 0 + 1\cdot x + \frac{0}{2!}x^2 + R_3$$
$$= x + R_3.$$

ここで, $R_3 = -\frac{\cos\theta}{3!}x^3$

ただし, θ は 0 と x の間の数.

この一文がぬけていると減点.

(2) 前問の R_3 の絶対値を評価することにより, $x = 0.1$ の場合について, $\sin x$ と x の誤差はいくら以下といえるか見積もれ.

$\sin x$ と x の誤差 $= |\sin x - x| = |R_3|$

$$= \frac{|\cos\theta|}{3!}x^3 \leq \frac{x^3}{6} = \frac{0.1^3}{6} = \frac{1}{6\cdots}$$

よって $\sin 0.1$ と 0.1 の誤差は $1/6000$ 以下である.

応用 3. マクローリンの定理を用いて関数 $f(x)$ を 4 次の項まで展開すると,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + R_5, \qquad R_5 = \frac{f^{(5)}(\theta)}{5!}x^5.$$ （ただし, θ は x と 0 の間にある数）

問題 3. (1) $f(x) = \sin x$ について, マクローリンの定理を用いて 4 次の項まで展開せよ. ($f(x) = \boxed{} + R_5$ の形にせよ).

$$\sin x = 0 + 1\cdot x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{-1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + R_5$$

$$= x - \frac{x^3}{6} + R_5, \quad ここで\ R_5 = \frac{\cos\theta}{5!}x^5.$$

ただし, θ は 0 と x の間の数

(2) 前問の R_5 の絶対値を評価することにより, $x = 0.1$ の場合について, $\sin x$ と $x - \frac{x^3}{6}$ の誤差はいくら以下といえるか見積もれ.

$$|R_5| \leq \frac{|x|^5}{5!} = \frac{0.1^5}{5\cdot4\cdot3\cdot2} = \frac{10^{-5}}{120} = \frac{1}{12000000}$$

ゆえに, $\sin 0.1$ と $0.1 - \frac{0.1^3}{6}$ の誤差は $\frac{1}{12000000}$ 以下である.