# 解析学 **I**・微分積分学 **I** 演習問題 (関数の近似)

学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

**約束.** 関数 $f(x)$ の $n$ 回微分を $f^{(n)}(x)$ で表す. 例えば $f''(x) = f^{(2)}(x)$ である. また $f^{(0)}(x)$ ($f(x)$ の 0 回微分) は, $f(x)$ 自身のこととする.

**テイラーの定理 (教科書 p.68 定理 5.6).** $n+1$ 回微分可能な関数 $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ が与えられているとする. このとき各点 $a, x \in (\alpha, \beta)$ に対して, 次を満たす $\theta = \theta(a, x, n)$ が $a$ と $x$ の間に存在する:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1},$$
$$\text{ここで,}\quad R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

**注意.** 各項において $f$ を何回か微分したものに $a$ を代入しているが, 最後の項の $R_{n+1}$ においてのみ, $a$ とは少しだけずれた $\theta$ を代入している. この微調整により, 等式が成立するのである.

**約束.** $a = 0$ の場合のテイラーの定理を**マクローリンの定理**という.

**応用 1.** マクローリンの定理を用いて関数 $f(x)$ を 1 次の項まで展開すると,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + R_2, \qquad R_2 = \frac{f^{(2)}(\theta)}{2!}x^2. \quad \text{（ただし, } \theta \text{ は } x \text{ と } 0 \text{ の間にある数）}$$

問題 1. $f(x) = \log(1+x)$ について, マクローリンの定理を用いて 1 次の項まで展開せよ. ($f(x) = \boxed{\phantom{xxx}} + R_2$ の形にせよ).

**応用 2.** マクローリンの定理を用いて関数 $f(x)$ を 2 次の項まで展開すると,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + R_3, \qquad R_3 = \frac{f^{(3)}(\theta)}{3!}x^3.$$ （ただし, $\theta$ は $x$ と 0 の間にある数）

問題 2. (1) $f(x) = \sin x$ について, マクローリンの定理を用いて 2 次の項まで展開せよ. ($f(x) = \boxed{\phantom{xx}} + R_3$ の形にせよ).

(2) 前問の $R_3$ の絶対値を評価することにより, $x = 0.1$ の場合について, $\sin x$ と $x$ の誤差はいくら以下といえるか見積もれ.

**応用 3.** マクローリンの定理を用いて関数 $f(x)$ を 4 次の項まで展開すると,

$$f(x) = f(0)+f'(0)x+\frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4+R_5, \qquad R_5 = \frac{f^{(5)}(\theta)}{5!}x^5.$$ （ただし, $\theta$ は $x$ と 0 の間にある数）

問題 3. (1) $f(x) = \sin x$ について, マクローリンの定理を用いて 4 次の項まで展開せよ. ($f(x) = \boxed{\phantom{xx}} + R_5$ の形にせよ).

(2) 前問の $R_5$ の絶対値を評価することにより, $x = 0.1$ の場合について, $\sin x$ と $x - \dfrac{x^3}{6}$ の誤差はいくら以下といえるか見積もれ.