

線形代数に関するアンケートにお書き頂いた質問に回答します. ページ数や節番号については, 断りがない限り『線形代数学講義ノート』(2022/04/04 ver.) のものを指します. また YouTube 動画は, 私のチャンネルにあげているものを指します. 「ぺんちゃん本」は『微分積分学の試練』を指します.

はじめに, 次の 5 つの質問については, YouTube 動画「線形代数学 I 第 1 回 (線形代数学とは何か) [前半/後半]」をご覧ください.

- 線形代数が何を目的とした (何の思想をもって作られた) 理論なのか分からない.
- 何のために行列概念を導入したのか. 行列の積の由来を知りたい.
- 行列を用いると何がいいのか.
- 線形代数を学ぶことで何ができるようになるのか. きちんと理解している人に線形代数の可能性を教えてください.
- 何のために線形写像を導入するのか.

以下の質問には, YouTube 動画「線形代数学 I 第 1 回 (線形代数学とは何か) [前半/後半]」の内容を前提とした上でお答えします.

- (1) 文系の友達に「行列って何?」とよく質問されるが, 答がいつも曖昧になってしまい納得してもらえません. この問に対する端的な答を知りたい.

**コメント.** 線形写像 (≡ 比例の多変数版) を数値データ化して分析・計算をしやすくしたものが行列です.

- (2) 「線形」という言葉の意味・由来が気になる.

**コメント.** 連載第 1 回を楽しみにしててください.

- (3) ベクトルは線形代数という分野の一部なのか

**コメント.** 数ベクトルはぺんちゃん本にも登場しましたが, ペンちゃん本は線形代数の本ではありません. ベクトルを使って何がしたいかによって, それは線形代数の一部になる場合もあるし, そうでない場合もあります.

- (4) クロネッカーのデルタはなんの意味があるのか,

**コメント.** 単位行列を成分表示する際に利用します.

- (5) 数学では縦に並ぶ配列を「列」としているが, 映画館やコンサートホールの座席では横に並ぶ配列を「列」と読んでいる. この相違はどこから来るのか.

**コメント.** 日常語としての「列」が, 縦横に関係なく並ぶもの全般に対して適用できるためでしょう,

- (6) 行列の商が定義できないわけを知りたい.

**コメント.** ペンちゃん本 p.135 で除法の意味を理解した上で, 講義ノート p42. のコラムをご覧ください.

- (7) 行列の累乗が分かりません.

**コメント.** 行列の累乗の各成分の一般項を求めることは, 漸化式の一般項を求めることを意味しています. また, 累乗そのものは, 線形変換の合成を意味しています.

(8) rank という語句の由来は、簡約化の主成分が階段状に並んでいるからでよいのか。

コメント. 私はそのように認識しています.

(9) 連立1次方程式以外で、中高の数学とつながることを知りたいです.

コメント. YouTube 動画「線形代数学 I 第7回 (同次系の方程式と重ね合わせの原理) [前半]」を最後までご覧ください.

(10) ベクトル空間はなぜ導入されたのか. そして具体的に何に使われるのか.

コメント. YouTube 動画「線形代数学 I 第7回 (同次系の方程式と重ね合わせの原理) [後半]」を最後までご覧ください. もちろん前提知識として [前半] を見ておく必要があります.

(11) 置換が分かりません

コメント. YouTube 動画「線形代数学 I 第9回 (置換) [前半/後半]」をご覧ください.

(12) 部分空間がなぜあの三つの条件で示すことができるのか.

コメント. YouTube 動画「線形代数学 II 第3回 (いろいろな線形部分空間) [前半]」をご覧ください.

(13) 線形独立・従属が何を言いたいのか分かりません.

コメント. YouTube 動画「線形代数学 II 第4回 (線形結合と線形独立性) [前半]」をご覧ください.

(14) 次元を扱う意義は何ですか.

コメント. 線形空間の分類に用いることができます. p.168 のコラムをご覧ください.

(15)  $2 \times 2$  行列は何次元になるのか. そもそも次元として捉えるのは間違いなのか.

コメント. 例 22.1.4(1) をご覧ください. その根拠は例 18.2.2 にあります.

(16) 退化次数がよくわかりません.

コメント. そもそも  $\text{Ker } f$  が何か分かっていますか.

(17) 有限次元と無限次元について深く理解せずに学習を進めてしまい、もやもやしている.

コメント. いったん次元はおいておいて、そもそも有限と無限の違いをどれくらい理解していますか. 無限の恐ろしさは、ペンちゃん本 5.9 節で垣間見ることができます. まずは有限と無限の違いを理解し、その違いを次元に適用してみれば、おのずと有限次元と無限次元の違いが見えてくることでしょう.

(18) 双対空間とか商空間とか何が嬉しいのかさっぱり分からない.

コメント. 商空間について: YouTube 動画「線形代数学 II 第10回 (商空間と第1同型定理) [前半]」をご覧ください.

双対空間について: 双対空間は線形関数の空間ですから、線形関数を調べてみたいという動機が見つからない限り、これを学んでいて嬉しくなることはないでしょう. 例えば図形  $A$  と関数  $f$  (線形でなくてもよい) に対して、 $A$  における  $f$  の積分を対応させる操作を考えます. このとき、この操作において  $A$  を固定して  $f$  を動かせば、これは関数空間を定義域とする線形関数になります. また、図形の集合を線形空間とみなせるよう定式化しておき、 $f$  を固定して  $A$  を動かしてみた場合、これは図形の空間を定義域とする線形関数になります. このような積分操作を調べたくなれば、双対空間を扱う理由も見えてくるでしょう.

(19) 関数をベクトルとみなせるとはどういうことですか。

**コメント.** 線形空間の元をすべてベクトルと呼ぶ、という文脈においては、とくに何かの意図があるわけではなく、そう呼ぶと約束したに過ぎません. 一方で、 $f(\boldsymbol{x})$  と表示するときに、どちらが代入するもの(ベクトル)でどちらが代入されるもの(関数)かを本質的に区別することはできません. これは、双対空間の双対空間を考えることで理解できます(27.5節). この意味においても、関数はベクトルであると考えられます.

(20) 表現行列が何なのかよく分かっていません.

**コメント.** YouTube 動画「線形代数学 II 第 1 2 回 (線形写像の表現行列) [1/3]」をご覧ください.

(21) 変換の方法や公式は覚えたが、なぜその公式になるかが理解できない.

**コメント.** YouTube 動画「線形代数学 II 第 1 2 回 (線形写像の表現行列) [3/3]」をご覧ください.

(22) 固有値や固有ベクトルの本質の意味が分からない. 対角化は他の授業でも頻繁にでてきているが、なぜここまで重要なのか.

**コメント.** 分析しやすいベクトルの代表例として固有ベクトルがあります. 固有ベクトルが分析しやすい理由については YouTube 動画「線形代数学 II 第 1 3 回 (固有値と固有ベクトル) [1/3]」をご覧ください.

(23) 対角化を何のためにやっているのか分かりません.

**コメント.** 固有ベクトルに分解するのが真の目的なのであって、対角化はそれに付随して使う道具という位置づけだと考えましょう.

(24) ヴァンデルモンドの行列式は何に使うのか

**コメント.** 講義ノート内において「定理 11.2.2」で検索をかけてみると、その応用例をいくつか見ることができますが、そこには共通する何かがあることにお気づきになるでしょうか. そう、いずれも (一般) 固有ベクトルの線形独立性を示すために援用されているのです.

(25) 微積と線形が今後融合されていくのかも気になる.

**コメント.** そのような分野を関数解析学といいます.

(26) シュミットの直交化が、あのような手法で成立する理由を知りたい.

**コメント.** p.277 の説明をご覧ください.

(27) 内積と外積について、イメージ的に内積は仕事量、外積は二つのベクトルに垂直な方向に生えるアイツミたいな感じがあるのですが、なんでそういうことが言えるのか全く分からないので計算する意義が分からない.

**コメント.** まずは、ベクトル  $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$  と長さ 1 のベクトル  $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$  の内積の意味を理解しましょう (p.276: 微積分の授業でも板書したはず). これが分かれば、仕事量を得る際に内積を取るの理由が見えてくるでしょう. 外積については、直交補空間の単位ベクトルがどのような手順で得られるのか考えるところから始めてみましょう.

(28) 線形代数学の最終的な目標は何か.

**コメント.** 具体的に学ぶべき定理等の最終目標については、講義ノートの 34 章と 39 章に書いてある諸命題をご覧ください. そもそも線形代数学で学ぶことは一部を除いて数学的

にはほぼ自明であり、この分野を学問だの理論だのと呼ぶのははばかれる、という感覚を数学者は持っています。その感覚を身に付ける、というのが本当の意味での目標と言えるでしょう。

- (29) 交代行列について学んだが、他の科目で対称行列、正則行列、直交行列などは使われることが多いのに対し、交代行列を使う機会が少ない(ほとんどない)ように感じるので、交代行列がどのような他の分野に関わっているのか疑問に感じた。

**コメント.** 応用でどのように使われているかは私も分かりません。純粋数学の文脈で交代行列を理解したいのであれば、リー群とリー環の関係について学ぶ必要があります。

- (30) 写像の概念がよく分かりません。

**コメント.** ペンちゃん本の第5章をはじめから読み直しましょう。

- (31) 行列計算、簡約化、逆行列、行列式などがどのようなことに応用できるのか。

**コメント.** すくなくとも、微積分の授業で用いたのを覚えていますか。

- (32) 行列の幾何学的視点で考えた内容があまり理解できていないのですが、この先困ることはあるかどうか知りたい(行列の足し算、行列式など)。

**コメント.** 計算できれば良いという立場に甘んじるのであれば、困ることはないかも。

- (33) 線形代数的な考え方を養う方法、またそのために有益な書籍など。

**コメント.** 講義ノート、YouTubeの講義、これからやる連載に有益な情報が載っています。

- (34) 抽象的なものを継続して学ぶ方法

**コメント.** 一般的には、その具体例をいくつか知らないと机上の空論になって、学ぶ意欲はあまり沸かないと思います。「抽象的なものを学ぶ=知っている具体例をすべて同時に考える」と見なすと、色々な意図が見えてくることと思います。一方で人によっては具体例は知らなくても、その抽象的数学ゲームが楽しいという理由で学び続けられる場合もあります。

- (35) 勉強方法を知りたい。合う合わないはあると思うが、一つの参考として教えて頂きたい。

**学生時代の私からの助言:** 微積分と線形代数には興味がなかったので全く勉強しませんでした。また、授業では指定教科書に書いてある以上のことが提供されることはなく、受講することに価値を見出せませんでした。ただし、周りの友人の理解度がどの程度あるかに興味があったので、授業は滅多にはサボりませんでした。やる気がなかったため最低限の計算規則を覚えるだけで単位を取りましたが、その程度の理解しかなくても何とかあります。そのかわり興味があることを際限なく学ぶようにしましょう。

**先生としての助言:** 他人(架空の人物でもよい)に教えてあげるつもりで学ぶと理解が深まります。できれば、自分が授業することを想定したプレゼン資料(よくまとめられた自習ノート)を作ってみましょう。聴衆から質問されそうなことを予想し、その解答も用意しておきましょう。慣れてくると、プレゼン資料は脳内に作るだけで済むようになり、何も見ずに教えられる状態になります(これが「理解した」ことを意味します)。

- (36) 教科書を読んでも、ネットで調べてみても、ヨビノリの本を読んでも、嶺先生の教材を読んでも、自分の中で腑に落ちる説明が見つからず“?”は増えるばかりです。

**コメント.** 資料にあたるだけでは、腑に落ちる答えは永遠に見つからないかもしれません。その理由は、何をもってあなたが腑に落ちるかを誰も把握できていないからです。どうすれば腑に落ちるかを生身の人間(先生や友人)に伝えつつ問いかけない限り、求める答えに

は恐らくたどり着かないでしょう。大学はこのような要望に答える施設であり、本やネットで学べないものが大学にはあります。

(37) 信号の誤り訂正に線形代数がどのように使われているのか。

**コメント.** 本質的部分については有限体を学んでください。線形代数が手段として用いられる点で関係ないということはありませんが、〇〇理論に酸素がどのように使われているかを問われているように私は感じました (答: 〇〇理論を学ぶ際に呼吸する必要があり、〇〇理論では酸素が利用されている)。

以下の質問への回答は、「何をもって線形代数を利用したとみなすか」という認識の差が各人にあり、あらゆる考え方を想定すると際限がないため割愛します<sup>1</sup>。恐らく皆さんにとって、今後は上の比喻にある「酸素」のように線形代数を無自覚に使うことになることでしょう。

- 大学1年生の線形代数が、2,3,4年と学年が上がるにつれて、どのように応用され、活用されるのか。
- 線形代数のすべての単元は、実際に日常生活やデータ解析のどのような場面で活用できるのか。行列・行列式や簡約化、固有値、線形結合などの知識はデータ分析に応用できるが、線形空間などへの理解が個人的にはやや曖昧であり、活用の仕方もよく分からない。そして、この先に学ぶ他の単元についてはどのような活用があるのか。
- 情報系においても役に立つ学問なのか。どのように活用されるかなど大まかで良いので知りたい。
- 線形代数と現代社会との繋がり (応用的な話) や、論理的な繋がりを知りたい。

---

<sup>1</sup>例えば微分を用いたら、その時点で線形代数を使ったと考えてよいのか (微分は線形写像の一つである)。