Question 本書のはさみうちの原理の証明はまわりくどくないですか.

初学者でもトライできるよう, なるべく問題を細分化・単純化して説明しています. これは本書全体を通して言えることです.

実際の授業では全ての命題を証明しきれないから, 次のように示しております.

Thm3.4.6 (はさみうちの原理)

- $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$
- $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leq b_n \leq c_n$

$\Longrightarrow$ b_n も収束列であり, $\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$.

proof 任意に $\varepsilon > 0$ を取る. $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$ を適用すると,

$\exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $n > N \Longrightarrow |\alpha - a_n| < \varepsilon$ かつ $|\alpha - c_n| < \varepsilon$. ①

(注 ここで Lem3.3.6 を用いました.)

この時, 「$n > N \Rightarrow |\alpha - b_n| < \varepsilon$」が成り立つ. 何故なら,

$n > N$ とすると ① より
$$\begin{cases} |\alpha - a_n| < \varepsilon. \quad \text{つまり } \alpha - \varepsilon < a_n < \alpha + \varepsilon. \\ |\alpha - c_n| < \varepsilon. \quad \text{つまり } \alpha - \varepsilon < c_n < \alpha + \varepsilon. \end{cases}$$

よって $\alpha - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < \alpha + \varepsilon$. つまり $|\alpha - b_n| < \varepsilon$.

(仮定 $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leq b_n \leq c_n$)

□