例4.4.5 $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $a_n := nr - [nr]$ とすると
$\forall x \in [0,1]$, $\exists a_{n_k}$: a_nの部分列 s.t. $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = x$.

復習

Def (本 p.199) X : 距離空間, $A \subset X$ とする.
AがXの稠密部分集合である (or Xにおいて稠密) $\underset{def}{\iff}$ $\forall U$: Xの空でない開集合, $A \cap U \neq \phi$.

例 $\mathbb{Q}$や$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$は$\mathbb{R}$の稠密部分集合である.

以下, $A \subset X$がXにおいて稠密であるとき $\underset{dense}{A \subset X}$ とかく.

Prop A X : 距離空間, $\underset{dense}{B \subset A}$ かつ $\underset{dense}{A \subset X}$ $\Rightarrow$ $\underset{dense}{B \subset X}$

Prop B $y_n \in [0,1]$ を数列とし, $Y = \{y_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ とする.
$\underset{dense}{Y \subset [0,1]}$ $\Rightarrow$ $\forall x \in [0,1]$, $\exists y_{n_k}$: y_nの部分列 s.t. $\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = x$.

したがって, a_nを例4.4.5で与えた数列とし, $D = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$とすると,
$\underset{dense}{D \subset [0,1)}$ を示せば, 例4.4.5が示されたことになる.

(:) もし $\underset{dense}{D \subset [0,1)}$ が示されたとすると, $\underset{dense}{[0,1) \subset [0,1]}$ と Prop A より
$\underset{dense}{D \subset [0,1]}$ を得る. あとは Prop B を適用すればよい

平行移動と回転

$p:\mathbb{R}\to S^1$ を $p(t):=(\cos 2\pi t,\ \sin 2\pi t)$ とする。　（注 $\overset{\text{単位円}}{S^1}:=\{x\in\mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2=1\}$）

pは、長さ1の各閉区間を S^1全体にうつす連続写像である。

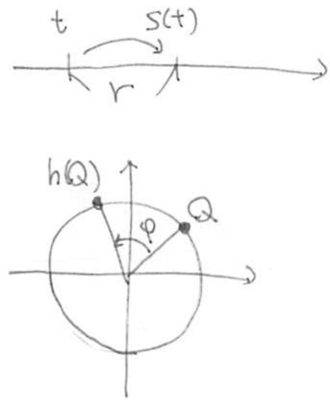
$r\in\mathbb{R}$ を固定する（ここでは有理数の場合も考える）　$\varphi:=2\pi r$ とおく。

すると、"$\mathbb{R}$における r平行移動" と "S^1における φ回転" が対応することが分かる。
これを式を使って書くと、次のようになる：

$s:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $s(t):=t+r$,　$h:S^1\to S^1$ を $h(\cos\theta,\sin\theta):=(\cos(\theta+\varphi),\ \sin(\theta+\varphi))$

とすれば、$h^n\circ p=p\circ s^n$ が成り立つ。（ただし、$h^n=\underbrace{h\circ h\circ\cdots\circ h}_{n個}$）

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r, "s"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbb{R} \arrow[r, "s"] \arrow[d, "p"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbb{R} \arrow[r, "s"] \arrow[d, "p"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\
S^1 \arrow[r, "h"'] & S^1 \arrow[r, "h"'] & S^1 \arrow[r, "h"'] & S^1
\end{tikzcd}
\rightsquigarrow
\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r, "s^3"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\
S^1 \arrow[r, "h^3"'] & S^1
\end{tikzcd}$$



Point 1 下に記す。

Point 2 $r\in\mathbb{Q}$ か $r\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ で、hの挙動は決定的に異なる。

Def (1) 点列 a_n は周期的である $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists k\in\mathbb{N}$ s.t. $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_{n+k}=a_n$

(2) 写像 $f:X\to X$ は周期的である $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists k\in\mathbb{N}$　$f^k=\mathrm{id}_X$

注 $f:X\to X$ が周期的であるとき、$x_0\in X$ を1つ取り、$a_n:=f^n(x_n)$ と定めると、a_nは周期的である。

上の $h:S^1\to S^1$ については、更に次が成り立つ（上の注の逆に相当する）。

Fact hは周期的である $\Longleftrightarrow$ $\exists Q_0\in S^1$ s.t. $Q_n:=f^n(Q_0)$ は周期的である。

Prop. C $r\in\mathbb{Q}$ $\Longleftrightarrow$ hは周期的である。

Point 1 $nr,\ \underset{\overset{\shortparallel}{a_n}}{nr-[nr]}\in\mathbb{R}$ は、pでうつすと S^1上の同じ点に対応する。

$\rightsquigarrow$ $P_0:=p(0)$, $P_n:=p(a_n)$ とおくと、$P_n=p(a_n)=p(nr)=p(s^n(0))=h^n(p(0))=h^n(P_0)$

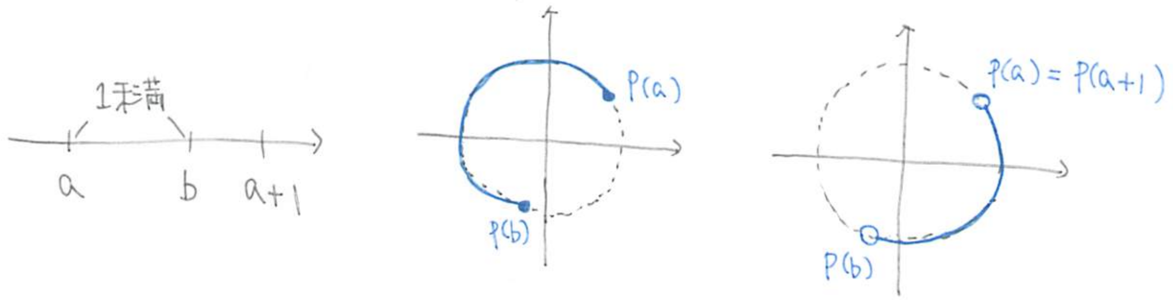
つまり、$P_0,P_1,P_2,\cdots$ は $\varphi=2\pi r$ 回転の軌跡となる。

S^1上の弧

Def $a, b \in \mathbb{R}$ (ただし $0 < b - a < 1$) を用いて

(1) $A = p([a,b])$ と表せる集合 $A \subset S^1$ を (両端点を含む) 弧 という.

(2) $A^\circ = p((a,b))$ と表せる集合 $A^\circ \subset S^1$ を 両端点を含まない弧 という.



注 弧 $A = p([a,b])$ の S^1 における補集合は 両端点を含まない弧 $B^\circ = p((b, a+1))$ である.
両端点を含まない弧 $A^\circ = p((a,b))$ の S^1 における補集合は 弧 $B = p([b, a+1])$ である.

Lem. A $\forall U \subset S^1$: S^1の空でない開集合, $^\exists A$: S^1上の弧 s.t. $A \subset U$.

Lem. B $0 < b - a < 1$ とする. (1) 弧 $A = p([a,b])$ は S^1 の閉集合である.
(2) 両端点を含まない弧 $A^\circ = p((a,b))$ は S^1 の開集合である.

無理数回転 以下, $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\varphi := 2\pi r$.
$h : S^1 \to S^1$ $h(\cos\theta, \sin\theta) := (\cos(\theta + \varphi), \sin(\theta + \varphi))$ とする.

Thm $\forall Q_0 \in S^1$, $\Delta := \{ h^n(Q_0) \mid n \in \mathbb{N} \}$ とおくと, $\Delta \underset{\text{dense}}{\subset} S^1$

Cor $P_0 := (1,0) \in S^1$, $P_n := h^n(P_0)$ $(= p(nr) = p(nr - [nr]))$ について
$\Delta := \{ P_n \mid n \in \mathbb{N} \}$ とおくと, $\Delta \underset{\text{dense}}{\subset} S^1$.

Prop. $a_n = nr - [nr]$, $D = \{ a_n \mid n \in \mathbb{N} \}$ について, $D \underset{\text{dense}}{\subset} [0,1)$.

Thm $\forall Q_0 \in S^1$, $\Delta := \{h^n(Q_0) \mid n \in \mathbb{N}\}$ とおくと $\Delta \underset{\text{dense}}{\subset} S^1$.

proof $Q_n := h^n(Q_0)$ とおく. 背理法により示す.

仮にΔがS^1において稠密でないとすると

$\exists U \subset S^1$: 空でないS^1の開集合 s.t. $\Delta \cap U = \phi$.

このとき, Uに含まれる弧$\overset{\frown}{QR}$が取れる. $\overset{\frown}{QR}$のなす角を$\varepsilon > 0$とする.

ここで$\overset{\frown}{QR}$を十分短かく取ることにより, $0 < \varepsilon < \pi$としてよい. まず次を示す:

Claim 各$m, n \in \mathbb{N}$ $(m > n)$について, Q_nとQ_mのなす角をθとすると (ただし, $-\pi < \theta \leq \pi$) $|\theta| \geq \varepsilon$.

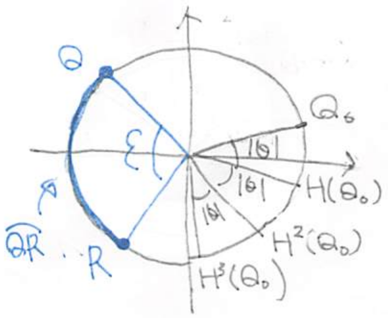
Claimの証明 $H : S^1 \to S^1$を$H := h^{m-n}$と定める.

($\boxed{\text{注}}$ Hは, Q_nをQ_mにうつす. 実際, $H(Q_n) = h^{m-n}(Q_n) = h^{m-n}(h^n(Q_0)) = h^m(Q_0) = Q_m$.

Hは $(m-n)\varphi$回転であり, $(m-n)\varphi \equiv \theta \pmod{2\pi}$.

つまり, Hはθ回転ともみなせる.)

$|\theta| \geq \varepsilon$を背理法により示そう. 仮に$|\theta| < \varepsilon$とすると,



Q_0にHを何回かほどこすと, $\overset{\frown}{QR}$の中に入る.

つまり, $\exists k \in \mathbb{N}$ s.t. $H^k(Q_0) \in \overset{\frown}{QR} \subset U$.

よって, $Q_{(m-n)k} = h^{(m-n)k}(Q_0) = H^k(Q_0) \in U$

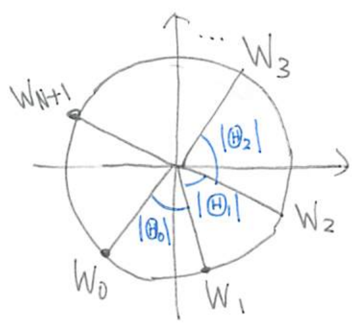
これは$\Delta \cap U \neq \phi$に矛盾する. ゆえに, $|\theta| \geq \varepsilon$. $\boxed{\text{Claimの証明おわり.}}$

さて, $N := \left[\frac{2\pi}{\varepsilon}\right]$とおく (つまり $N \leq \underbrace{\frac{2\pi}{\varepsilon} < N+1}_{(※)}$)

$r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$より, hは周期的でない. したがって

$Q_0, Q_1, Q_2, \cdots, Q_{N+1}$はすべて異なる点である.

これらを隣りあう順に並びかえたものを$W_0, \cdots, W_{N+1}$とする.



弧$\overset{\frown}{W_i W_{i+1}}$のなす角を$\Theta_i$とすると, Claimより, $\varepsilon \leq |\Theta_i| \leq \pi$

このとき, $2\pi > \sum_{i=0}^{N} |\Theta_i| \geq (N+1)\varepsilon \underset{(※)}{>} 2\pi$. 以上により矛盾 $2\pi > 2\pi$ を得た. □