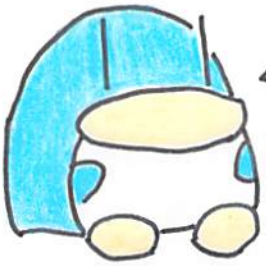
Question

開区間 $(0, 1/n)$ たちの共通部分 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (0, 1/n)$ が空集合になることが感覚的に納得できません。



だってさあ、むりょうたいすう個とってきて共通部分を取っても ϕ にならないじゃん。

$$(0,1)\cap(0,1/2)\cap(0,1/3)\cap(0,1/4)\cap\cdots\cap(0,1/10^{68})=(0,1/10^{68})\neq\phi.$$

感覚が通じないときこそ論理のチカラが威力を発揮するのさ。

Prop. $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (0, 1/n) = \phi$.

proof $I_n := (0, 1/n)$ とおく。$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \phi$ を背理法で示そう。

そこで、$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ が元 a を含むと仮定する。

> 復習 (Def. 1.7.2) $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ x \in I_n.$

つまり 各 $n\in\mathbb{N}$ について $a \in I_n$ が成立している。 ①

とくに $a \in I_1 = (0,1)$ より $a > 0$ である。

実数のアルキメデス性より、$\exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $\frac{1}{a} < N$.

このとき $\frac{1}{N} < a$ であり、ゆえに $a \notin (0, 1/N) = I_N$.

一方、① より $a \in I_N$ である。

以上より、$a \in I_N$ と $a \notin I_N$ の両方が導びかれ、これらは矛盾している。

したがって、$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ は元を含んではいけない。 □