Question

関数の極限の定義には2つの流儀があるとのことですが、本書の流儀の方が面倒なように思えます。

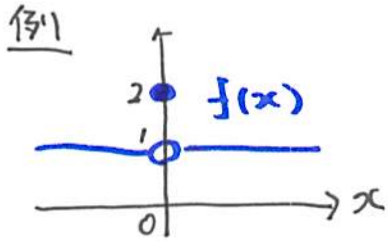
$\lim_{x \to a} f(x) = b$ について。

$\boxed{流儀A}$ $x=a$ となってもよいとして、変数 x を a に限りなく近づけるとき $f(x)$ は b に限りなく近づく。

$\boxed{流儀B}$ $x \neq a$ として、変数 x を a に限りなく近づけるとき $f(x)$ は b に限りなく近づく。

本書では $\boxed{流儀A}$ を採用しています。

例



この関数について....

$\boxed{流儀A}$ $x \to 0$ において $f(x)$ は極限を持たない。

∵ $x_n = \begin{cases} 1/n & (n:\text{奇数}) \\ 0 & (n:\text{偶数}) \end{cases}$ は0に収束するが、

$f(x_n) = \begin{cases} 1 & (n:\text{奇数}) \\ 2 & (n:\text{偶数}) \end{cases}$ は収束しないから。

$\boxed{流儀B}$ $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$ である。

Point（$\boxed{流儀A}$ の利点と欠点）

利点……f の定義域から点 a を除くことで $\boxed{流儀B}$ 型の極限も表現できる。

欠点……いちいち定義域に点 a が含まれるのかどうか言及する必要がある。

やっぱり、定義域を述べないとイケナイのは面倒だと思うんです。

$\boxed{流儀B}$ 型の極限を考える必要がある場合、定義域に a が含まれないことが明らかであることが実際には多いのです。ですから $\boxed{流儀A}$ で話をすすめても、多くの場合は「a を除く」と宣言する必要はなく、面倒でもないのです。

例 — $\lim_{h \to 0} \frac{f(b+h)-f(b)}{h}$.

上の lim 記号下の関数は、$h=0$ を定義域に含まないことは明らか。
よって、流儀A,B のいずれで考えている場合でも、この極限は
$h \neq 0$ として h を 0 に限りなく近づけていくことを意味する。

Thm. $X, Y \subset \mathbb{R}$, $f: X \to Y$, $g: Y \to \mathbb{R}$ について
f と g が共に連続ならば $g \circ f: X \to \mathbb{R}$ も連続である。

proof. $a \in X$ とし、点 a における $g \circ f$ の連続性を示す。
そのためには「$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} g \circ f(x_n) = g \circ f(a)$」を示せばよい。
$\lim_{n\to\infty} x_n = a$ とする。

$\boxed{\text{流儀A}}$ による証明

f の連続性を用いた。

$$g \circ f(a) = g(f(a)) = g\left(f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)\right) = g\left(\lim_{n\to\infty} f(x_n)\right) = \lim_{n\to\infty} g\left(f(x_n)\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} g \circ f(x_n). \quad \square$$

g の連続性を用いた ☆

上の ☆ を詳しく見ると、$y_n = f(x_n)$ および $b = \lim_{n\to\infty} y_n$ について
点 b における g の連続性を適用し、$\lim_{n\to\infty} g(y_n) = g(b)$ $= g\left(\lim_{n\to\infty} f(x_n)\right)$.

注 ε-δ論法で証明する場合でも、$\boxed{\text{流儀B}}$ で示す場合は、場合分けをする必要があります。

警告

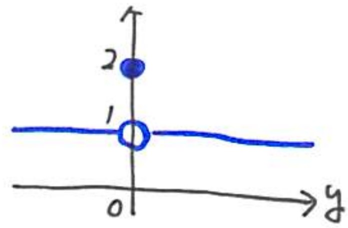
Prop.7.2.2 (p.116) $X, Y \subset \mathbb{R}$, $f: X \to Y$, $g: Y \to \mathbb{R}$ について,

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = b \\ \displaystyle\lim_{y \to b} g(y) = c \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x \to a} g \circ f(x) = c.$$

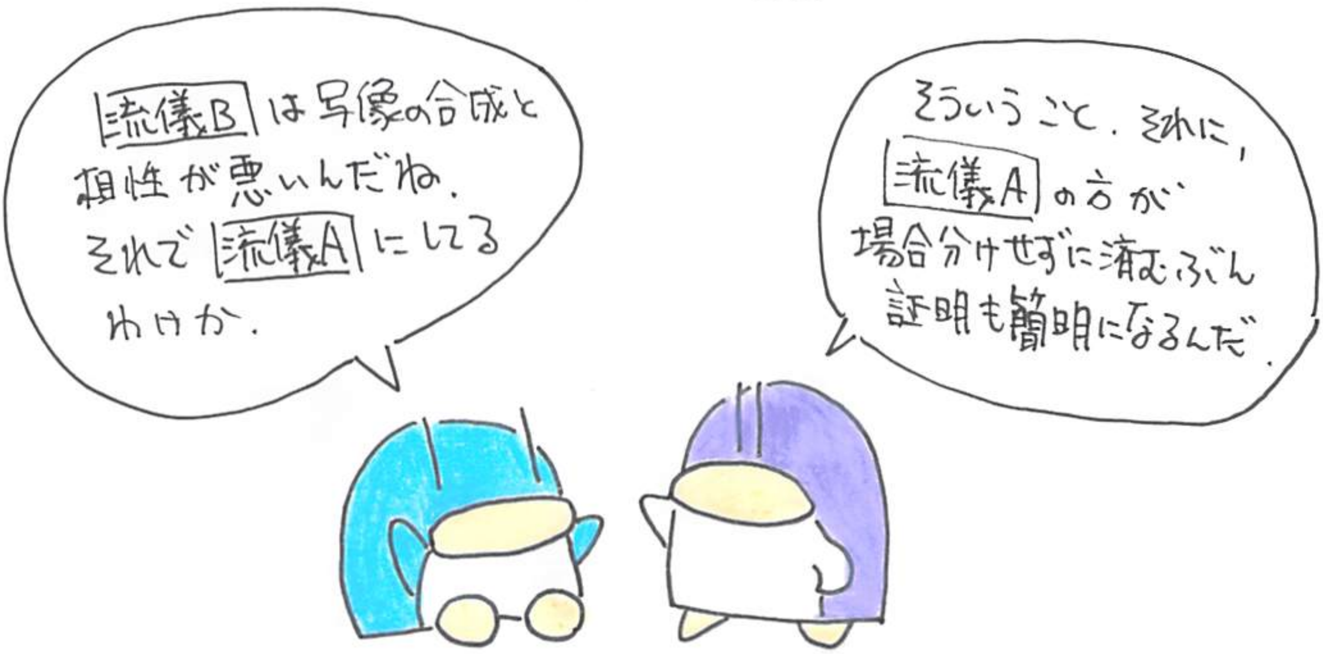
$\boxed{\text{流儀B}}$ における反例

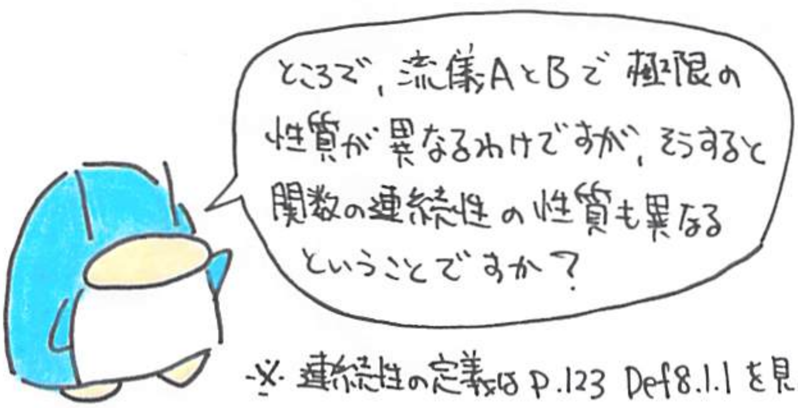
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(x) = 0$ (定数関数)

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$$g(x) = \begin{cases} 1 & (x \neq 0 \text{ のとき}) \\ 2 & (x = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$



とすると, $\boxed{\text{流儀B}}$ において $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x) = 0$, $\displaystyle\lim_{y \to 0} g(y) = 1$ である.
(上の命題について, $a=0$, $b=0$, $c=1$ の場合に相当する.)
ところが, $g \circ f(x) = 2$ (定数関数) ゆえ $\displaystyle\lim_{x \to 0} g \circ f(x) = 2 \neq c$.

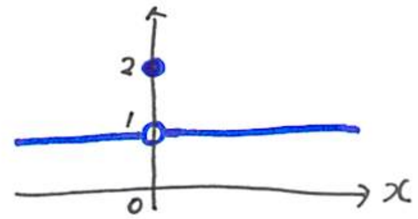




※ 連続性の定義は p.123 Def 8.1.1 を見よう．

例1（さっきの例）

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \neq 0 \text{ のとき}) \\ 2 & (x = 0 \text{ のとき}). \end{cases}$$



f は点 0 において連続でない．その理由は…

流儀A $\lim_{x \to 0} f(x)$ は存在しない．

ゆえに，f は点 0 において連続でない．□

流儀B $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$，$f(0) = 2$ である．

よって $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$ は成立しない．□

「$f: X \to \mathbb{R}$ は点 $a \in X$ で連続である」の定義は…

流儀A $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in X\quad |a - x| < \delta \Rightarrow |f(a) - f(x)| < \varepsilon.$

流儀B $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in X\quad 0 < |a - x| < \delta \Rightarrow |f(a) - f(x)| < \varepsilon.$

例2 自然数全体 $\mathbb{N}$ を定義域とする任意の関数 $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ は各点 $a \in \mathbb{N}$ において連続である．その理由を ε-δ 論法で論じると…

流儀A $\varepsilon > 0$ に対して $\delta = 1$ とすると

「$|a - x| < 1 \Rightarrow |f(a) - f(x)| < \varepsilon$」

が成り立つ．何故なら，$|a - x| < 1$ とするとこれをみたす $x \in \mathbb{N}$ は $x = a$ のみである．

よって $|f(a) - f(x)| = |f(a) - f(a)| = 0 < \varepsilon$ □

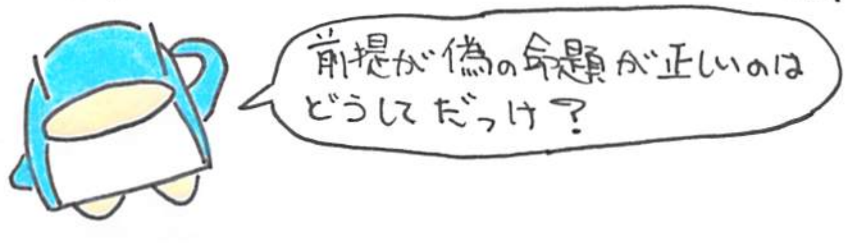
流儀B $\varepsilon > 0$ に対して $\delta = 1$ とすると

「$0 < |a - x| < 1 \Rightarrow |f(a) - f(x)| < \varepsilon$」が成り立つ．

何故なら，$0 < |a - x| < 1$ をみたす $x \in \mathbb{N}$ は存在しない．

よって前提が偽の命題

「$0 < |a - x| < 1 \Rightarrow |f(a) - f(x)| < \varepsilon$」は成立する．□



付録　流儀AとBに関する連続性の同値性を確認しよう．

(I)　$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x\in X\quad |a-x|<\delta \implies |f(a)-f(x)|<\varepsilon.$

(II)　$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x\in X\quad 0<|a-x|<\delta \implies |f(a)-f(x)|<\varepsilon.$

$\boxed{(\mathrm{I}) \Rightarrow (\mathrm{II})}$　これは明らかであるが，一応証明を書く．

(I)を仮定する．このとき「$0<|a-x|<\delta \Rightarrow |f(a)-f(x)|<\varepsilon$」が成り立つ．

実際，$0<|a-x|<\delta$ とすれば，$|a-x|<\delta$ ゆえ，

(I)より $|f(a)-f(x)|<\varepsilon$ である．　□

$\boxed{(\mathrm{II}) \Rightarrow (\mathrm{I})}$

(II)を仮定する．このとき「$|a-x|<\delta \Rightarrow |f(a)-f(x)|<\varepsilon$」が成り立つ．

実際，$|a-x|<\delta$ とすれば，

Case 1　$a\neq x$ のとき．

$0<|a-x|<\delta$ ゆえ (II)より $|f(a)-f(x)|<\varepsilon$ を得る．

Case 2　$a=x$ のとき．

$|f(a)-f(x)|=|f(a)-f(a)|=0<\varepsilon.$　□