まえがき

本書『微分積分学の試練』は，高校から大学へと数学を橋渡しする際につまずくことが多い「極限」の扱い (ε-δ 論法) を分かりやすく解説することを目的としています．本書を読めば，微分積分学 (解析学の初歩) の学習に必要な極限の理念・知識・技術を獲得することができるでしょう．本書の主な読者として，次のいずれかに該当する方々を想定しています．

（1）　微積分や解析学を学んでいる理工系の 1 年生．その中でもとくに，極限の諸性質に関する証明を理解し，解析学を厳密に学びたいと考えている人．

（2）　教育系や文科系の学生で，数直線や連続関数といった普段は漠然と捉えがちな概念が，大学レベルの数学においてきちんと定式化されていく過程に興味がある人．

（3）　数学科や物理学科に進学した 2 年生以上の学生で，新たに学ぶことになった「集合と位相」の抽象性に戸惑い，どこから復習してよいか困っている人．

微積分をより深く発展的に学ぶためには，微分と積分の定義に現れる極限についての理解がかかせません．極限について曖昧な説明しかできなかった高校数学では，いくつかの重要な定理を証明せずに用いていました[1)]．大学の数学ではこの曖昧さを反省して，ε-δ 論法という手法を用いた極限の確かな定義とその諸性質の証明を与えていくことになります．

ただ，実際の講義では授業時間に限りがあることから，ε-δ 論法を駆け足で済ませることも多く，講義を受講しただけでは極限の扱い方がよく分からなかったと感じる学生が少なくありません．そのような方々が，極限について隅々まで徹底的に納得するための自習書として本書は向いています．極限のいろはについて十分すぎるほどに丁寧な解説と，痒いところに手が届くような親切な証明が本書に記されています．

また本書は，計算を主体とせずに数学的概念の本質について学びたいと考えている文科系の学生にも向いています．本書の主題は，実数や関数といった，より基本的と考えられる数学的対象に焦点をあてて，基礎への理解を深めていくことにあります．

1）高校数学では，極限の定義を「限りなく近づくこと」というふうに語感に頼る説明で済ませています．このため，中間値の定理や最大値・最小値の定理，はさみうちの原理などの証明を与えていません．

したがって難しい計算は出てきませんし，誤解がないように簡単な計算も途中の変形を略さずに記しています．さらに，新しい事柄について学ぶ際には，それらの概念や定義の背景にひそむ考え方を重視して説明しています．これまで数学をパターン暗記の学だと考えていた人も，本書を通して，数学は単なる論理ゲームとは違うと実感できることでしょう．

一方で，本書の内容は，主に数学科の二年生が学ぶ「集合と位相」とも深く関係しています．この分野で学ぶことは，“微積分や解析学において「実数の連続性」を学んだ際に得た極限の技術を一般の集合に対して適用するための方法論” といえるでしょう．しかし，集合と位相を学ぶ学生のなかには実数の連続性とその周辺への理解がおぼつかないままの人も多く，これではさらに抽象度の高い対象へと移っても確かな理解を得ることはできません．このような方にも本書は向いています．本書では，数直線上の極限の諸性質と，図形 (距離空間) における極限の諸性質が関連づけられている様子をいくつも紹介しています．これらの関連を理解した上で集合と位相の学習に臨めば，よりいっそうの理解が得られることでしょう．

本書を読むための予備知識としては，高校 2 年生レベルの数学を前提としています．微積分に少し触れた経験さえあれば，本文の意図を理解できることでしょう．とはいえ建前の上では，すべての概念を再構成しますから，微積分の知識がまったくなくても読むことができます．なお，ごく一部の話題で，線形代数学 (行列とベクトル空間) の知識を断りなく用いました．この本の読者の多くは並行して線形代数も学んでいるでしょうから，大きな問題は生じないことと思います．仮にそうでなかったとしても，線形代数が関係する箇所を無視しても不都合なく読めるように書いてあります．

本書の構成について簡単に説明します．第 I 部の前半では集合に関する約束事を共有したうえで，実数の性質 (実数の連続性) について検討します．後半では数列の極限の定義を与え，極限のどんな性質が実数の連続性から導かれるのか，その詳しい解説を与えました．第 II 部の前半では，関数 (写像) に関する一般論に触れたあとで，高校で学んだ具体的な関数の定義と諸性質を復習します．後半は，関数の極限および ε-δ 論法，連続関数の諸性質について学びます．第 III 部では，多変数関数の連続性について議論し，さらに図形 (距離空間) のあいだの写像において連続性が定式化されることを見ます．中間値の定理と最大値・最小値の定理はこの立場で証明を与えました．最後に，付録の章を二つ設けてあります．付録 A では，本書で学んだ極限の知識が微積分の理論で用いられる様子を，駆け足ながら説明しました．また，本書では $\forall, \exists$ といった論理記号を用いた表現は避けましたが，これらの記号を用いる微積分の

講義にも対応できるよう，論理法則の復習と論理記号の使い方について付録 B で概説しました．この章は，論理的な思考力を養うための道しるべにもなることでしょう．

高校数学において証明しなかった事実について，本書では次の箇所で証明を与えています：はさみうちの原理 (3.6 節)，逆関数の連続性 (8.3 節)，指数法則 (9 章)，中間値の定理 (13.4 節)，最大値・最小値の定理 (14.2 節)，代数学の基本定理 (14.7 節)，$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ の収束性 (A.3 節)，ロピタルの定理 (A.6 節)，オイラーの公式 (A.8 節).

本書の大部分は，早稲田大学基幹理工学部および先進理工学部の 1 年次生を対象とした微積分の授業で用いた講義ノートがもとになっています．実際の講義では，通年で 60 回ある授業のうちはじめの 14〜15 回程度を本書の内容にあてています．授業を通して講義ノートに関するご意見や誤植の指摘を多くの学生諸君からいただき，本書をより充実した内容に仕上げることができました．

本書の仕上げの段階では，早稲田大学の薄葉季路さんと千葉工業大学の山下温さんから，専門家の目線で有益な助言をいただくことができました．また，非専門家の目線での指摘，および言葉の言い回しの相談について，弟夫婦 (圭佑・祐希) に助けられました．イラストレーターの奥田雅子さんには原画を忠実に再現した挿絵を描いていただきました．そして，本書が完成に至るまで，日本評論社の飯野玲さんには陰に陽に尽力していただきました．以上の方々に改めて深く感謝申し上げます．

2018 年 11 月

著者しるす

本書の読み方

各章の冒頭で，全体的な趣旨をまとめています．これから何をしたいのかを心に留めながら本文を読むと，より深い理解が得られるでしょう．

各定理の証明は，最終的には一字一句もらさずに読むことが望まれます．とはいえ，まずは全体像を把握するために証明の細かな部分を飛ばして読む，という方法も理解を広げる上では有効です．

「発展」と記した部分はやや高度な内容で，かならずしも 1 年生の微積分で扱うとは限らないものを指します．ただ，これらは 2 年生以上を対象にした解析学や幾何学の講義において，前提とされる知識になります．「よりみち」と題した部分では，発展的な微積分を学ぶ際に必須というわけではないものの，教養人として知っておいてほしいことを扱いました．

各章末には練習問題があり，その多くは後半の話題で役に立つ内容になっています．証明の作法を身に着けていない読者にとって，これらを何も見ずに解くのは難しいでしょう．巻末の答えを読んで内容を理解できるのであれば，自力で解けずともさしつかえありません．専門課程で深い数学を必要とする予定の方には，答えを見ずに証明を再構成できるように復習しておくことを勧めます．

目次

コラム