改元にともない、破格の出血大サービス。

数学 B2 (微分積分) 基幹 (4) 中間試験 (2019/6/10 月曜 3 限)

(計 140 点)　　学籍番号 ＿＿＿＿ – ＿＿＿＿　氏名 ＿＿＿＿＿＿

解答上の注意. 丁寧な字で記述すること. 量化子を用いた論理式を記す問題においては, 次に従うこと: (1) 記号 $\neg$ を使用してはいけない. ただし, $\neq$ は用いてよい. (2) 記号 $\wedge$ の代わりに「かつ」を用いても良い. (3) 以前の問いに現れた条件は, 論理式に戻さずに用いてよい.

問題 1. 次の条件を論理式を用いて記述せよ. ここで, $m, \alpha \in \mathbb{R}$, a_n を実数列, $A, B, U \subset \mathbb{R}$ とする. (各 2 点)

(1) m は A の最小値である.

[誤答例] $\forall x \in A$, $m \in A$ かつ $m \leq x$.

$A=\phi$ について これは真になってしまう。

(2) B は上に有界である.

Bが有界であることの定式を書く人が目立ちました。

問題を簡単にしたつもりだったのだけれど…

(3) 実数のアルキメデス性.

∀と∃の順序が入れ替わると全然ちがう意味になってしまう点に注意しましょう

(4) $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$.

語学力がないとムズカシイです

(5) a_n は α に収束しない.

どうして $\lim_{n\to\infty} a_n \neq \alpha$ にしなかったの?

ケケケ….

(6) $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

授業で深ぼりしなかった内容も結構出題されたねえ。問題2(2),(3)とか。

(7) U は $\mathbb{R}$ の開集合である.

開区間と開集合の違いは分かるかな?

できるかな?

問題 2. 実数のアルキメデス性, および発散型のはさみうちの原理を認めたうえで, 次を示せ. (各 10 点)

(1) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

「$\forall \varepsilon>0$, アルキメデス性より $\exists N\in\mathbb{N}$ s.t. $\frac{1}{N}<\varepsilon$」とする解答は5点。更に、(2)でも類似する使い方をしていたら、(2)については0点。

えーっ

だって、これだと、「アルキメデス性の適用の仕方を本当に理解しているのか」それとも「示すべき収束の条件を念頭に何となく部分点をもらおうとしているのか」の判別できないでしょ。

(2) 定数 $\delta > 0$ について, $\lim_{n\to\infty} \delta n = \infty$.

(2)と(3)では、「極限を$\alpha\in\mathbb{R}$とすると矛盾が生じるから∞に発散する」とする解答が目立ちました。

君達は、この命題を自明だと思ってるのかな?

命題
狭義単調増加数列 a_n が実数に収束しなければ、a_n は ∞ に発散する。

だったら証明できる?

(3) 定数 $a > 1$ について, $\lim_{n\to\infty} a^n = \infty$.

log使う証明はダメよ

どうして〜

問 どんな値なら関数 $\log_a x$ に代入可能なのか?

これを理解するには、関数 a^x の値域が $(0,\infty)$ になることを確かめねばならない。その証明は、実数の連続性まで戻って地道に示すか、$\lim_{n\to\infty} a^n=\infty$ と中間値の定理から導く(教科書の方法)などが考えられる。

a^x の値域を求める際に(3)を用い、logを用いて(3)を示すと循環論法になってしまう。つまり、(3)の証明でlogを使うには、上の問いに前者で答える必要がある。

問題 3. 関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が点 $a\in\mathbb{R}$ において連続であること (すなわち $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$) の定義を, 次の文脈に沿って論理式で記せ. (各 2 点)

(i) 数列の収束を用いた定義 (「$\forall a_n$: 実数列 〜」という形で述べよ).

注「$\forall a_n$: 実数列〜」という表現に違和感をおぼえる人へ…
$\mathbb{R}$ 上の数列全体の集合を $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, 数列 (= ∞次元のベクトル) $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ を $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ と書くことにして「$\forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 〜」と表す方法もある。

(ii) ε-δ 論法による定義.

「$\forall a\in X$」と書いてある解答が目立ったね。点aは問題文で既に固定されてるのに。

問題 4. 前問の条件について, 次に答えよ.

(1) (i) の否定を論理式で記せ. (2 点)

「a_nはαに収束しない」と「$\lim_{n\to\infty} a_n \neq \alpha$」は違うよ

マジで!?

(下参照)

(2) (ii) の否定を論理式で記せ. (2 点)

「A⇒B」の否定は「Aかつ ¬B」(AであるにもかかわらずBでない)です

(3) (i)⇒(ii) を証明せよ. (10 点)

・「a_nはαに収束しない」とは….
「a_nは収束列でないか、または a_nは収束するが極限はαでない。」のこと。

・「$\lim_{n\to\infty} a_n \neq \alpha$」とは….
「a_nは収束列であり、かつその極限はαでない。」のこと。

きいてないよ〜

問題 5. 連続関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ について, 次を示せ. (10 点)
「開集合 $V \subset \mathbb{R}$ について, $f^{-1}(V)$ は開集合である.」

この問題の採点はたったの30分で終わった。

はやっ

挑戦者が少なかったからね。

1年生のうちから問題5が自力で解けるようであれば、数学については先生は不要かもしれませんね。

←80点以上の人がもらえる。

ちなみに、問題6は採点に1時間かかったよ。

問題 6. 任意の無理数 x に対して, x に収束する有理数列が存在することが知られている. これを用いて次を示せ. (各 5 点)

(1) 空でない開区間 $(a,b)\subset\mathbb{R}$ は有理数を含む.

このあたりから、問題文を復唱するだけの解答がふえてきたねえ….

証明の冒頭を「ある無理数 $x\in(a,b)$ について〜」ではじめてしまうと、(a,b) は無理数を含むことが明らかなように読めてしまいます。

(2) 連続関数 $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が $f|_{\mathbb{Q}} = g|_{\mathbb{Q}}$ を満たすならば, $f = g$.

[平均点] 34.3点

参考　2018年度　45.1点 (130点満点)
　　　2017年度　43.9点 (120点満点)
　　　2016年度　45.5点 (130点満点)

合計点が10点増えたのに, 逆に平均は10点下がったぞ.

教え方に問題があったのかも…

問題 11. 距離空間 (X, d) および $a \in X$, $\varepsilon > 0$ について, 次を証明せよ. (各 5 点)

(1) $U, V \subset X$ が共に X の開集合であるとき, $U \cap V$ も X の開集合である.

[得点分布] 最高点 106点.

100点以上	1人
90～99点	2人
89～80点	3人
79～60点	10人
59～40点	8人
39～30点	8人
29～20点	23人
19～10点	18人
9～0点	8人

総採点時間 12時間.

(受験者数 81人)

(2) $N(a, \varepsilon)$ は X の開集合である.

ペンちゃん描いたのに全然点数もらえないんですけど.

描くならイケメンにしてもらわないと

それだと事実に反します.

(3) $F = \{x \in X \mid d(a, x) \geq \varepsilon\}$ は X の閉集合である.

こんな簡単な問題を出題していいの?

いいんじゃないかな.

(4) $N(a, \varepsilon)$ は有界である.

$N(a,\varepsilon)$を$\mathbb{R}$の部分集合だと思っている人がいっぱいいたゾ.

Xは$\mathbb{R}^n$やS^{n-1}かもしれないのにねえ

S^2 … 2次元球面

(5) $A \subset X$ を X の閉集合とすれば, 次が成り立つ:

「$a_n \in A$ かつ $\alpha = \lim_{n \to \infty} a_n \in X \implies \alpha \in A$.」

「(3)より $A = \{x \in X \mid d(a, x) \geqq \varepsilon\}$とかける」と書いてる解答が何件かありました.

そういう人は, 「$P \Rightarrow Q$」と「$Q \Rightarrow P$」の区別がついてないことになりますね.

すべての集合は空集合に一致するって事が証明できちゃうぜ

問題 12. 次の条件を論理式で記せ. (各 2 点)

(1) 写像 $f : X \to Y$ は単射である.

[誤答例] $\forall x, x' \in X,\ f(x) \neq f(x') \Longrightarrow x \neq x'$!

どんな写像でも成立する条件だね

(2) 写像 $f : X \to Y$ は全射である.

「$f(X) = Y$」って答えはズルだと思う

問題 13. 次の関数が全射であるか, そして単射であるか答えよ. 証明はせず, 答えのみ記せばよい.

(正答で 1 点, 無回答で 0 点, 誤答で −1 点)×10 問

(1) $f : [-1, 2] \to [0, 4]$, $f(x) = x^2$.

「～でない」の時は解答しなければ得点になると勘違いさせてしまったかもしれません

(2) $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [0, 1]$, $f(x) = \cos x$.

無回答は0点って書いてあるじゃん.

(3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$.

[Point] 全射性の証明では, 中間値の定理を使うと楽ができる (授業でやった).

(4) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = 2x$.

2倍すると$3 \in \mathbb{Z}$になる整数はないよ (全射でない).

(5) $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $f(x) = 2^x$.

2^x は 0にはならないよ (全射でない).

問題 14. これまでの講義の中で, 実数の連続性を本質的に用いることによって導いた主張 (命題, 定理, 事実など) を一つ挙げよ (ただし, 実数のアルキメデス性および, これから導かれる主張は除く). 定理の名称だけではなく, 主張そのものを記述すること (論理式による記述でなくともよい). (3 点)

- 実数の連続性そのものを答えた場合は 0点.
- 授業でやらなかった命題については △2点.

もちろん, 命題の内容が間違ってたらダメだぜ.

問題 15. $\mathrm{pr}_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ($\mathrm{pr}_1(x, y) = x$) が連続であることを ε-δ 論法により示せ. (8 点)

この採点は, なんと12分でおわった.

超はやっ

ε-δ論法の問題っていうと, 一般的にはδをいかに見積もるかがメインなわけだから, $y = 1/x$ みたいなやつを出題するんだけどね. 今回は $\delta := \varepsilon$ とすればすむ激甘問題にしておいたぜ. もっとカンタンな, $\delta :=$ 無量大数 とすればすむ問題の方がよかったかな?

問題 16. 複素数列 z_n について次を示せ. ただし, $\mathbb{C}$ の完備性は既知とする. (8 点)

「$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ は収束する $\implies$ $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ は収束する.」

模範解答では「収束列はコーシー列である」を使ってたけど, コレかってに使っちゃっていいの?

すまん

試験中に質問してね

試験の直前にやった命題ならみなさん覚えていると思って, 親心で出題したつもりだったのよ. いい気になってるだけだったわ.