数学 B2 (微分積分) 基幹 (4) 教場試験 (2019/7/23)

(計 120 点)　学籍番号 ＿＿＿＿＿ – ＿＿＿＿＿　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿

問題 1. 関数 $f : (-1,1) \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ を $f(x) := \sin^{-1} x$ と定める. 逆関数の微分公式を用いて $y = f(x)$ の導関数を導け. (10 点)

$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ より $\cos y > 0$.

ゆえに $\cos y = \sqrt{\cos^2 y}$.

$\boxed{5点}$

$$\frac{dy}{dx} = 1 \Big/ \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{\cos^2 y}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

← 119 ~ 110点の人

120点以上の人 →

問題 2. 次の関数の導関数を求めよ. ただし $\theta \in \mathbb{R}$ は定数とする. (各 5 点)

(1) $y = x \sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2}$　$y' = \sin^{-1} x$.

受験者数 82人

結果

120点以上	6人
119 ~ 110点	6人
109 ~ 100点	17人
99 ~ 90点	15人
89 ~ 80点	9人
79 ~ 70点	7人
69 ~ 60点	8人
59 ~ 50点	7人
49点以下	7人

最高点 131点

平均点 85.7点

みんな きちんと
対策してきた
みたいだね

(2) $y = x^{\sin\theta}$

(i) $\sin\theta \neq 0$ のとき $y' = x^{-1+\sin\theta} \sin\theta$.

(ii) $\sin\theta = 0$ のとき

$y = 1$ より $y' = 0$.

$\boxed{注}$ (ii)の場合, 定義域は $\mathbb{R}$ である.

$x^{-1} \cdot 0$ の定義域は $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ であるから,

(i)と(ii)の答えをまとめて $y' = x^{-1+\sin\theta} \sin\theta$

とするのは厳密には望ましくない.

(3) $y = 2\cos^{-1}\sqrt{\frac{x+1}{2}}$　$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

上式が $\cos^{-1} x$ と一致
する話は覚えてるかな?

(4) $y = x\sqrt{x^2+1} + \log\left|x + \sqrt{x^2+1}\right|$　$y' = 2\sqrt{x^2+1}$.

大学受験レベルの問題が
出題されてる…….

問題 3. $D = \frac{d}{dx}$ および $I = \mathrm{id}$ を C^∞ 級関数に関する作用素とする．次の式を計算せよ．ただし $\lambda \in \mathbb{R}$ は定数とする．（各 5 点）

(1) $(D-2I)(D+3I)(e^{\lambda x}) = (\lambda-2)(\lambda+3)e^{\lambda x}$.

これは もちろん 暗算で O.K.

(2) $(D^2 - 2\lambda D + \lambda^2 I)(xe^{\lambda x})$

$= (D-\lambda I)^2(xe^{\lambda x})$

$= (D-\lambda I)(e^{\lambda x} + \lambda x e^{\lambda x} - \lambda x e^{\lambda x})$

$= (D-\lambda I)(e^{\lambda x}) = 0$.

めちゃくちゃ簡単に計算してる！

物理等で使う線形微分方程式に習熟してる人にとっては明らかな問題でした．

問題 4. 次の問いに答えよ．（各 5 点）

(1) マクローリンの定理を用いて $\sin x$ を 4 次の項まで展開せよ（$f(x) = \boxed{} + R_5$ の形にせよ）．

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + R_5$. $\boxed{3点}$

$R_5 = \frac{\cos\theta_x}{5!}x^5$. $\boxed{1点}$

ただし，θ_x は 0 と x の間の数． $\boxed{1点}$

(2) $\sin 0.1$ と $0.1 - \frac{0.1^3}{6}$ の誤差を評価せよ．

$|R_5| \leq \frac{|x^5|}{5!} = \frac{10^{-5}}{120}$.

注 (1)の R_5 が間違っていた場合は 0点．絶対値を忘れた場合は −2点．

(3) $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ を示せ．（ただし，定数 $a \in \mathbb{R}$ について $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ は認めてよいとする）．

$R_{2n+1} = \frac{f^{(2n+1)}(\theta_n)}{(2n+1)!} x^{2n+1}$.

ただし，θ_n は 0 と x の間の数．

↳ n に依存せず θ とした場合は −1点．

$\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ のことを $R_n = 0$ と書いてる人が何人もいたよ．

その人は，「将来の夢は○○○になることです」と「僕は○○○です」がごちゃまぜになっちゃってるんだろうね．

問題 5. $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ を C^2-級関数とする (ただし $\alpha < \beta$). このとき次を示せ. (各 10 点)

(1) 「$\forall x \in (\alpha, \beta),\ f'(x) > 0$」ならば, f は狭義単調増加である.

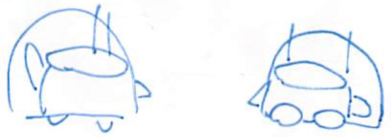
「limをとると >0 だから、
limをとる前の状況でも >0」
っていうギロンはダメなの？

「ヤ方近くで正」は言えるけど、
「いつでも 正」は言えないよね

問題5. では定ギ域の元でない
αやβをfに代入する答案も目立ち
ました. この問題の正解者は16人
でした.

(2) $a \in (\alpha, \beta)$ について「$f'(a) = 0$ かつ $f''(a) > 0$」ならば, f は点 a において狭義の極小値を取る.

授業中に中間値の定理は
必ず出題すると言っていたのに
出題されなかったじゃん っていう
コメントが 数件あったよ



それは恥ずかしいね.
せっかく カンタンにしたのに.

注 問題7は中間値の定理のトクベツな
場合です.

問題 6. 距離空間 (X, d) に関する次の定義を答えよ (同値な条件を答えてもよい). (各 5 点)

(1) X は連結である (不連結でない).

定ギの中に写像 f が
でてくる人が 何人か
いたよ.

何で？

(2) X は弧状連結である.

注 「曲線」の定ギがない場合は −1点と
することがある.
写像の連続性に言及していない
場合は 0点

問題 7. (X, d) を連結な距離空間とし, $a, b \in X$ とする. 連続関数 $f : X \to \mathbb{R}$ が $f(a) < 0 < f(b)$ を満たすとき, 次を示せ: (10 点)

$$\exists x \in X \text{ s.t. } f(x) = 0.$$

『IRの閉集合 A=[0,∞), B=(−∞,0] とすると』

この文は 何かが ヘン.
こう書く人が 多かった.

正しくは
「A=[0,∞), B=(−∞,0] とすれば, これらは
IRの閉集合であり 〜」 あるいは
「IRの閉集合 A=[0,∞), B=(−∞,0] を
取れば 〜」
じゃなかろうか.

問題 8. 距離空間 X から距離空間 Y への連続全射 $f : X \to Y$ が与えられているとする. 次を示せ. (各 10 点)

(1) X が弧状連結ならば Y も弧状連結である.

注 次の性質をどこで用いたか明確でない場合は減点することがある：
連続性，全射性，弧状連結性，点列コンパクト性

「△△△より
〜〜〜〜 であり． ← ココでは性質△△△を使っていない
ゆえに 〜〜〜 となる」 ← ココで△△△を使った.

上の様な文が目立ちました．まぎらわしいから避けよう．

△△△を使ってないのに「△△△より〜〜」と書く人もいっぱいいたね

(2) X が点列コンパクトならば Y も点列コンパクトである.

$f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2), f^{-1}(y_3), \cdots$ って点列なの？

違うよ．それは集合の列だよ．

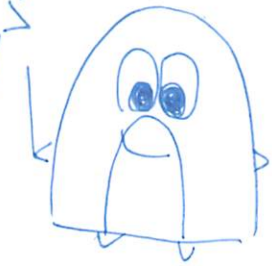
補足 過去問に載っていたこともあり問題8(1),(2)の正答率は共に62%と非常に高かった．

問題 9. 『微分積分学の試練』に関する次の問いや課題一つ選び, 回答せよ. 回答欄に余裕があるようであれば, 複数の問い・課題に答えても良い. (5 点)

(1) 第 III 部の扉絵において, 結局彼らは飛行機と地下ホールのどちらを選択したか (理由も述べること).
(2) 付録の部の挿絵に先生が一切登場しないのは何故か.
(3) 訪日したイタリアの友人が, 著者への土産にギュスターヴ・ドレの挿絵集を持ってきたのは何故か.
(4) 「あとがき」の内容について論じよ.

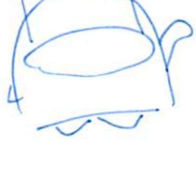
みんなの模範解答を授業で紹介します．

そうそう．私(学長)を嶺先生と同一視されている方が多数いらっしゃいました．違いますよ．



自由記述欄. どのような内容を記しても構わない. 記入内容によって減点の対象となることは一切ない (最大で 10 点程度の加点対象となる場合がある).

ここの基本点は5点になります．10点はそうやすやすとは入りません



キビシイねえ．6点しかもらえなかった．