1 例　放物線 $y=x^2+x$ 上の点 $(1,\ 2)$ における接線の方程式を求めなさい。

解答　$f(x)=x^2+x$ とおく。

$f'(x)=(x^2+x)'=2x+1$

よって，点 $(1,\ 2)$ における接線の傾きは

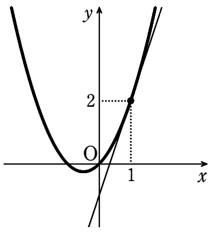
$f'(1)=2\times1+1=3$

したがって，求める接線の方程式は

$y-2=3(x-1)$

これを整理して

$y=3x-1$



●次の曲線上の与えられた点における接線の方程式を求めなさい。

(1)　$y=x^2-3x$　　$(1,\ -2)$

$f(x)=x^2-3x$ とおく。

$f'(x)=(x^2-3x)'=2x-3$

よって，点 $(1,\ -2)$ における接線の傾きは　$f'(1)=2\times1-3=-1$

したがって，求める接線の方程式は

$y-(-2)=-1(x-1)$

これを整理して　　$y=-x-1$

(2)　$y=3x^2+2$　　$(2,\ 14)$

$f(x)=3x^2+2$ とおく。

$f'(x)=(3x^2+2)'=6x$

よって，点 $(2,\ 14)$ における接線の傾きは

$f'(2)=6\times2=12$

したがって，求める接線の方程式は

$y-14=12(x-2)$

これを整理して　　$y=12x-10$

(3)　$y=\dfrac{1}{x^3}$，　$(-1,\ -1)$

$f(x)=\dfrac{1}{x^3}$ とすると　　$f'(x)=-\dfrac{3}{x^4}$

よって　　$f'(-1)=-\dfrac{3}{(-1)^4}=-3$

したがって，求める接線の方程式は

$y-(-1)=-3\{x-(-1)\}$

すなわち　　$y=-3x-4$

(4)　$y=\sin x$，A $(\pi,\ 0)$

$f(x)=\sin x$ とすると　　$f'(x)=\cos x$

よって　　$f'(\pi)=\cos\pi=-1$

したがって，求める接線の方程式は

$y-0=-1\cdot(x-\pi)$

すなわち　　$y=-x+\pi$

(5)　$y=\sqrt{x+2}$，A $(7,\ 3)$

$f(x)=\sqrt{x+2}$ とすると

$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}$

よって　　$f'(7)=\dfrac{1}{2\sqrt{9}}=\dfrac{1}{6}$

したがって，求める接線の方程式は

$y-3=\dfrac{1}{6}(x-7)$

すなわち　　$y=\dfrac{1}{6}x+\dfrac{11}{6}$

2 例　関数 $f(x)=x^3-3x$ の増減を調べなさい。

解答　$f'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)$

$=3(x+1)(x-1)$

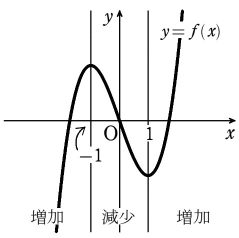
$f'(x)=0$ とすると　　$x=-1,\ 1$

$f'(x)>0$ となる x の範囲は　$x<-1,\ 1<x$

$f'(x)<0$ となる x の範囲は　$-1<x<1$

よって，$f(x)$ は $x<-1,\ 1<x$ で増加し，

$-1<x<1$ で減少する。



●次の関数の増減を調べなさい。

(1)　$f(x)=x^2-2x$

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-1	↗

$f'(x)=2x-2=2(x-1)$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=1$

したがって

$f'(x)>0$ となる x の範囲は　$x>1$

$f'(x)<0$ となる x の範囲は　$x<1$

よって，$f(x)$ は $x>1$ で増加し，

$x<1$ で減少する。

(2)　$f(x)=-x^2+4x+2$

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	6	↘

$f'(x)=-2x+4=-2(x-2)$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=2$

したがって

$f'(x)>0$ となる x の範囲は　$x<2$

$f'(x)<0$ となる x の範囲は　$x>2$

よって，$f(x)$ は $x<2$ で増加し，

$x>2$ で減少する。

(3)　$f(x)=x^3-3x^2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	0	↘	-4	↗

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=0,\ 2$

したがって

$f'(x)>0$ となる x の範囲は

$x<0,\ 2<x$

$f'(x)<0$ となる x の範囲は

$0<x<2$

よって，$f(x)$ は $x<0,\ 2<x$ で増加し，

$0<x<2$ で減少する。

(4)　$f(x)=-x^3+3x+1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-1	↗	3	↘

$f'(x)=-3x^2+3=-3(x^2-1)$

$=-3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=-1,\ 1$

したがって

$f'(x)>0$ となる x の範囲は　$-1<x<1$

$f'(x)<0$ となる x の範囲は

$x<-1,\ 1<x$

よって，$f(x)$ は

$-1<x<1$ で増加し，

$x<-1,\ 1<x$ で減少する。

(3)　$f(x)=\sqrt{x}-\dfrac{1}{2}x$

$f(x)$ の定義域は $x\geqq0$ である。

$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=1$

$f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	0	……	1	……
$f'(x)$	／	$+$	0	$-$
$f(x)$	0	↗	$\dfrac{1}{2}$	↘

したがって，$f(x)$ は $0\leqq x\leqq1$ で増加し，$1\leqq x$ で減少する。

(4)　$f(x)=2\sin x-3x$

$f'(x)=2\cos x-3<0$ であるから，$f(x)$ は常に減少する。

3 例　関数 $y=x^3-3x^2+1$ の極値を求め，グラフをかきなさい。

解答　$y'=3x^2-6x=3x(x-2)$

$y'=0$ とすると　　$x=0,\ 2$

よって，y の増減表は次のようになる。

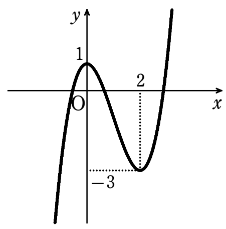
x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 1	↘	極小 -3	↗

したがって，この関数は

$x=0$ で極大値 1,

$x=2$ で極小値 -3　をとる。

また，グラフは右の図のようになる。



●関数 $y=x^3+3x^2-2$ について，次の問いに答えなさい。

(1)　この関数の増減表を完成させなさい。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 2	↘	極小 -2	↗

$y'=3x^2+6x=3x(x+2)$

$y'=0$ とすると　　$x=0,\ -2$

よって，y の増減表は上のようになる。

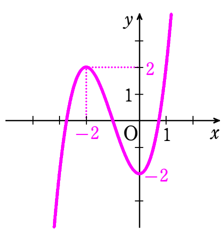
(2)　この関数の極値は次のようになります。

空らんにあてはまる数を入れなさい。

$x=$ ア $\boxed{-2}$ で極大値 イ $\boxed{2}$

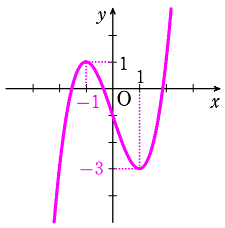
$x=$ ウ $\boxed{0}$ で極小値 エ $\boxed{-2}$

(3)　この関数のグラフをかきなさい。



4 ●次の関数の極値を求め，グラフをかきなさい。

(1)　$y=x^3-3x-1$



$y'=3x^2-3=3(x^2-1)=3(x+1)(x-1)$

$y'=0$ とすると　　$x=-1,\ 1$

よって，y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	極大 1	$\searrow$	極小 -3	$\nearrow$

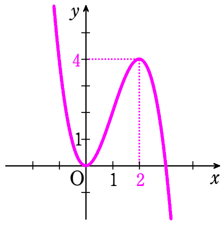
したがって，この関数は

$x=-1$ で極大値 1,

$x=1$　で極小値 -3　をとる。

また，グラフは図のようになる。

(2)　$y=-x^3+3x^2$



$y'=-3x^2+6x=-3x(x-2)$

$y'=0$ とすると　　$x=0,\ 2$

よって，y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\searrow$	極小 0	$\nearrow$	極大 4	$\searrow$

したがって，この関数は

$x=2$ で極大値 4,

$x=0$ で極小値 0　をとる。

また，グラフは図のようになる。

5 例　関数 $f(x)=x+\dfrac{3}{x}$ の極値を求めよ。

$f(x)$ の定義域は $x\neq 0$ である。

$$f'(x)=1-\frac{3}{x^2}=\frac{x^2-3}{x^2}=\frac{(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{x^2}$$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=-\sqrt{3},\ \sqrt{3}$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	……	$-\sqrt{3}$	……	0	……	$\sqrt{3}$	……
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大 $-2\sqrt{3}$	$\searrow$		$\searrow$	極小 $2\sqrt{3}$	$\nearrow$

よって，$f(x)$ は

$x=-\sqrt{3}$ で極大値 $-2\sqrt{3}$，$x=\sqrt{3}$ で極小値 $2\sqrt{3}$ をとる。

●次の関数の極値を求めよ。

$$f(x)=x-1+\frac{1}{x-6}$$

$f(x)$ の定義域は $x\neq 6$ である。

$$f'(x)=1-\frac{1}{(x-6)^2}=\frac{(x-6)^2-1}{(x-6)^2}=\frac{x^2-12x+35}{(x-6)^2}=\frac{(x-5)(x-7)}{(x-6)^2}$$

$f'(x)=0$ とすると　$x=5,\ 7$

$f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	……	5	……	6	……	7	……
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大 3	$\searrow$		$\searrow$	極小 7	$\nearrow$

よって，$f(x)$ は

$x=5$ で極大値 3,

$x=7$ で極小値 7

をとる。

●次の関数の極値を求めよ。

$$f(x)=x^4-6x^2-8x$$

$f'(x)=4x^3-12x-8=4(x^3-3x-2)=4(x+1)(x^2-x-2)=4(x+1)^2(x-2)$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=-1,\ 2$

$f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	……	-1	……	2	……
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	3	$\searrow$	極小 -24	$\nearrow$

よって，$f(x)$ は

極大値はない。

$x=2$ で極小値 -24 をとる。

●次の関数の極値を求めよ。

$f(x)=x-\sin 2x$　$(0\leqq x\leqq\pi)$

$f'(x)=1-2\cos 2x$

$f'(x)=0$ とすると　　$\cos 2x=\dfrac{1}{2}$

$0<x<\pi$ の範囲でこの等式を満たす x の値を求める。

$0<2x<2\pi$ であるから　　$2x=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi$

よって　　$x=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	……	$\dfrac{\pi}{6}$	……	$\dfrac{5}{6}\pi$	……	π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	極小 $\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	極大 $\dfrac{5}{6}\pi+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	π

よって，$f(x)$ は

$x=\dfrac{5}{6}\pi$ で極大値 $\dfrac{5}{6}\pi+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$x=\dfrac{\pi}{6}$ で極小値 $\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ をとる。

●次の関数の極値を求めよ。

$$f(x)=\frac{(1-x)^3}{1-2x}$$

$f(x)$ の定義域は $x\neq\dfrac{1}{2}$ である。

$$f'(x)=\frac{-3(1-x)^2(1-2x)-(1-x)^3(-2)}{(1-2x)^2}=\frac{(1-x)^2(-3+6x+2-2x)}{(1-2x)^2}$$

$$=\frac{(1-x)^2(4x-1)}{(1-2x)^2}$$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=\dfrac{1}{4},\ 1$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	……	$\dfrac{1}{4}$	……	$\dfrac{1}{2}$	……	1	……
$f'(x)$	$-$	0	$+$		$+$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	極小 $\dfrac{27}{32}$	$\nearrow$		$\nearrow$	0	$\nearrow$

よって，$f(x)$ は 極大値はない。$x=\dfrac{1}{4}$ で極小値 $\dfrac{27}{32}$ をとる。