

1 例 次の式を計算せよ。

(1) $a^{-3} \times a^5$
 $a^{-3} \times a^5 = a^{-3+5} = a^2$
 (3) $(a^2 b^{-3})^{-2}$
 $(a^2 b^{-3})^{-2} = (a^2)^{-2} (b^{-3})^{-2}$
 $= a^{2 \times (-2)} b^{(-3) \times (-2)}$
 $= a^{-4} b^6$

(2) $a^2 \div a^{-4}$
 $a^2 \div a^{-4} = a^{2-(-4)} = a^6$

● 次の値を求めよ。

(1) 2^5
 $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$

(2) 2^{-3}
 $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2 \times 2 \times 2} = \frac{1}{8}$

(3) 6^0
 $6^0 = 1$

(4) 3^{-4}
 $3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{3 \times 3 \times 3 \times 3} = \frac{1}{81}$

● 次の □ に適する数を求めよ。

(5) $5^0 = \square$
 $5^0 = 1$

(6) $(-8)^0 = \square$
 $(-8)^0 = 1$

(7) $3^{-2} = \frac{1}{\square}$
 $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

(8) $2^{-4} = \frac{1}{\square}$
 $2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$

(9) $\frac{1}{16} = 4^{\square}$
 $\frac{1}{16} = \frac{1}{4^2} = 4^{-2}$

(10) $0.0001 = 10^{\square}$
 $0.0001 = \frac{1}{10000} = \frac{1}{10^4} = 10^{-4}$

(11) $a^5 \times a^{-3} = a^{\square}$
 $a^5 \times a^{-3} = a^{5+(-3)} = a^2$

(12) $a^{-2} \div a^8 = a^{\square}$
 $a^{-2} \div a^8 = a^{-2-8} = a^{-10}$

(13) $(a^3 b^{-2})^4 = a^{\square} b^{\square}$
 $(a^3 b^{-2})^4 = (a^3)^4 (b^{-2})^4 = a^{3 \times 4} b^{(-2) \times 4}$
 $= a^{12} b^{-8}$

2 例 次の数を累乗根を用いて表せ。

(1) $2^{\frac{2}{3}}$
 $2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$

(2) $3^{-\frac{1}{2}}$
 $3^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

例 次の数を 2^r の形で表せ。ただし、 r は有理数とする。

(1) $\sqrt[5]{16}$
 $\sqrt[5]{16} = \sqrt[5]{2^4} = 2^{\frac{4}{5}}$

(2) $\frac{1}{(\sqrt{2})^3}$
 $\frac{1}{(\sqrt{2})^3} = 2^{-\frac{3}{2}}$

● 次の数を累乗根を用いて表せ。

(1) $3^{\frac{1}{5}}$
 $3^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{3}$

(2) $5^{\frac{2}{3}}$
 $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$

(3) $2^{-\frac{1}{4}}$
 $2^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$

(4) $8^{\frac{1}{3}}$
 $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8}$

(5) $6^{\frac{2}{3}}$
 $6^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{6^2} = \sqrt[3]{36}$

(6) $3^{-\frac{2}{3}}$
 $3^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{27}}$

● 次の数を 3^r の形で表せ。ただし、 r は有理数とする。

(1) $(\sqrt[5]{3})^3$
 $(\sqrt[5]{3})^3 = 3^{\frac{3}{5}}$

(2) $\frac{1}{(\sqrt[5]{3})^2}$
 $\frac{1}{(\sqrt[5]{3})^2} = \frac{1}{3^{\frac{2}{5}}} = 3^{-\frac{2}{5}}$

● 次の数を 5^r の形で表せ。ただし、 r は有理数とする。

(1) $\sqrt[3]{125}$

$\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5^{\frac{3}{3}} = 5^1$

(2) $\frac{1}{\sqrt[3]{5^2}}$

$\frac{1}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{1}{5^{\frac{2}{3}}} = 5^{-\frac{2}{3}}$

3 例 次の式を計算せよ。ただし、 $a > 0$, $b > 0$ とする。

(1) $2^{\frac{3}{2}} \times 2^{-\frac{1}{2}}$
 (与式) $2^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} = 2^1 = 2$

(2) $(4^{-\frac{2}{3}})^{-\frac{3}{2}}$
 (与式) $4^{(-\frac{2}{3}) \times (-\frac{3}{2})} = 4^1 = \sqrt{4} = 2$

(3) $(2^{\frac{1}{3}} \times 3^{-\frac{1}{2}})^6$
 (与式) $2^{\frac{1}{3} \times 6} \times 3^{(-\frac{1}{2}) \times 6} = 2^2 \times 3^{-3}$
 $= \frac{4}{27}$

(4) $4^{-\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{8}{3}}$
 (与式) $(2^2)^{-\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{8}{3}} = 2^{-\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{8}{3}}$
 $= 2^{-\frac{2}{3} + \frac{8}{3}} = 2^2 = 4$

(5) $5^{\frac{5}{3}} \div 5^{-\frac{1}{3}}$
 (与式) $5^{\frac{5}{3}-(-\frac{1}{3})} = 5^2 = 25$

(6) $2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{-\frac{5}{6}}$
 (与式) $2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{5}{6}} = 2^{\frac{3+2-5}{6}} = 2^0 = 1$

(7) $5^{\frac{3}{2}} \div 5^{\frac{5}{6}} \times 5^{\frac{1}{3}}$
 (与式) $5^{\frac{3}{2} - \frac{5}{6} + \frac{1}{3}} = 5^{\frac{9-5+2}{6}} = 5^1 = 5$

(8) $a^{\frac{1}{2}} \div a^{-\frac{11}{6}} \div a^{\frac{1}{3}}$
 (与式) $a^{\frac{1}{2} - (-\frac{11}{6}) - \frac{1}{3}} = a^{\frac{3+11-2}{6}} = a^2$

(9) $\sqrt[6]{2^5} \div \sqrt[3]{2} \times \sqrt{2^5}$
 (与式) $2^{\frac{5}{6}} \div 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{5}{2}} = 2^{\frac{5}{6} - \frac{1}{3} + \frac{5}{2}}$
 $= 2^{\frac{5-2+15}{6}} = 2^3 = 8$

(10) $\sqrt[3]{a^5 b} \div \sqrt[6]{ab^2} \times \sqrt{ab^4}$
 (与式) $a^{\frac{5}{3}} b^{\frac{1}{3}} \div a^{\frac{1}{6}} b^{\frac{2}{6}} \times a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{4}{2}}$
 $= a^{\frac{5}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{2}} b^{\frac{1}{3} - \frac{2}{6} + 2}$
 $= a^{\frac{10-1+3}{6}} b^{\frac{2-2+12}{6}} = a^2 b^2$

4 例 次の式を計算せよ。

(1) $9^{\frac{2}{3}} \times 9^{-\frac{1}{6}}$
 $9^{\frac{2}{3}} \times 9^{-\frac{1}{6}} = 9^{\frac{2}{3} + (-\frac{1}{6})} = 9^{\frac{1}{2}} = 3$

(2) $16^{\frac{3}{4}} \div 8^{\frac{1}{3}}$
 $16^{\frac{3}{4}} \div 8^{\frac{1}{3}} = (2^4)^{\frac{3}{4}} \div (2^3)^{\frac{1}{3}} = 2^{4 \times \frac{3}{4}} \div 2^{3 \times \frac{1}{3}}$
 $= 2^3 \div 2^1 = 2^{3-1} = 2^2 = 4$

(3) $\sqrt[4]{27} \times \sqrt[3]{9} \div \sqrt[12]{243}$
 $\sqrt[4]{27} \times \sqrt[3]{9} \div \sqrt[12]{243} = \sqrt[4]{3^3} \times \sqrt[3]{3^2} \div \sqrt[12]{3^5} = 3^{\frac{3}{4}} \times 3^{\frac{2}{3}} \div 3^{\frac{5}{12}}$
 $= 3^{\frac{3}{4} + \frac{2}{3} - \frac{5}{12}} = 3^1 = 3$

● 次の式を計算せよ。

(1) $3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}} \div 3^{\frac{5}{6}}$
 $3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}} \div 3^{\frac{5}{6}} = 3^{\frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{5}{6}} = 3^{\frac{2+4-5}{6}} = 3^1 = 3$

(2) $8^{-\frac{2}{3}} \times 4^{\frac{3}{2}} \div 2$
 $8^{-\frac{2}{3}} \times 4^{\frac{3}{2}} \div 2 = (2^3)^{-\frac{2}{3}} \times (2^2)^{\frac{3}{2}} \div 2$
 $= 2^{3 \times (-\frac{2}{3})} \times 2^{2 \times \frac{3}{2}} \div 2$
 $= 2^{-2} \times 2^3 \div 2 = 2^{-2+3-1}$
 $= 2^0 = 1$

(3) $\sqrt[3]{7} \times \sqrt{7} \times \sqrt[6]{7}$
 $\sqrt[3]{7} \times \sqrt{7} \times \sqrt[6]{7} = 7^{\frac{1}{3}} \times 7^{\frac{1}{2}} \times 7^{\frac{1}{6}}$
 $= 7^{\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}} = 7^{\frac{2+3+1}{6}} = 7^1 = 7$

(4) $\sqrt[3]{4} \times \sqrt[12]{2} \div \sqrt[8]{8}$
 $\sqrt[3]{4} \times \sqrt[12]{2} \div \sqrt[8]{8}$
 $= (2^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{12}} \div (2^3)^{\frac{1}{8}}$
 $= 2^{\frac{4}{9}} \times 2^{\frac{1}{12}} \div 2^{\frac{3}{8}}$
 $= 2^{\frac{8+1-9}{12}} = 2^0 = 1$

(5) $2^{\frac{5}{6}} \times 2^{-\frac{1}{2}} \div 2^{\frac{1}{3}}$
 $2^{\frac{5}{6}} \times 2^{-\frac{1}{2}} \div 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{5}{6} + (-\frac{1}{2}) - \frac{1}{3}} = 2^{\frac{5-3-2}{6}} = 2^0 = 1$

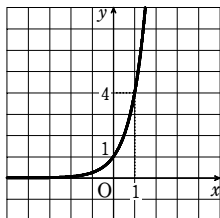
(6) $27^{\frac{1}{2}} \times 3^{-\frac{1}{6}} \times 81^{-\frac{1}{12}}$
 $27^{\frac{1}{2}} \times 3^{-\frac{1}{6}} \times 81^{-\frac{1}{12}} = (3^3)^{\frac{1}{2}} \times 3^{-\frac{1}{6}} \times (3^4)^{-\frac{1}{12}} = 3^{3 \times \frac{1}{2}} \times 3^{-\frac{1}{6}} \times 3^{4 \times (-\frac{1}{12})} = 3^{\frac{3}{2}} \times 3^{-\frac{1}{6}} \times 3^{-\frac{1}{3}} = 3^{\frac{3}{2} + (-\frac{1}{6}) + (-\frac{1}{3})} = 3^{\frac{3-1-2}{6}} = 3^0 = 3$

(7) $\sqrt[4]{25} \times \sqrt[12]{25} \div \sqrt[3]{25}$
 $\sqrt[4]{25} \times \sqrt[12]{25} \div \sqrt[3]{25} = 25^{\frac{1}{4}} \times 25^{\frac{1}{12}} \div 25^{\frac{1}{3}} = 25^{\frac{1}{4} + \frac{1}{12} - \frac{1}{3}} = 25^{\frac{3+1-4}{12}} = 25^0 = 1$

(8) $\sqrt{8} \times \sqrt[6]{32} \times \sqrt[3]{4}$
 $\sqrt{8} \times \sqrt[6]{32} \times \sqrt[3]{4} = (2^3)^{\frac{1}{2}} \times (2^5)^{\frac{1}{6}} \times (2^2)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{3}{2}} \times 2^{\frac{5}{6}} \times 2^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{3}{2} + \frac{5}{6} + \frac{2}{3}} = 2^{\frac{9+5+4}{6}} = 2^3 = 8$

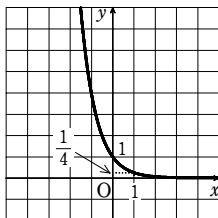
5 例 次の関数のグラフをかけ。

(1) $y = 4^x$

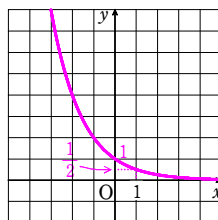
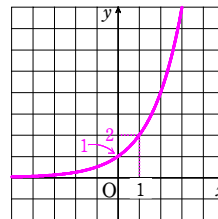


●関数 $y = 2^x$ のグラフをかけ。

(2) $y = (\frac{1}{4})^x$



●関数 $y = (\frac{1}{2})^x$ のグラフをかけ。



6 例 次の 3 つの数の大小を不等号を用いて表せ。

(1) $\sqrt{6}, 1, \sqrt[3]{36}$
 $\sqrt{6} = 6^{\frac{1}{2}}, 1 = 6^0, \sqrt[3]{36} = \sqrt[3]{6^2} = 6^{\frac{2}{3}}$
 指数の大小を調べると $0 < \frac{1}{2} < \frac{2}{3}$
 底 6 は 1 より大きいから $6^0 < 6^{\frac{1}{2}} < 6^{\frac{2}{3}}$
 すなわち $1 < \sqrt{6} < \sqrt[3]{36}$

(2) $(\frac{1}{3})^{-2}, (\frac{1}{3})^4, (\frac{1}{3})^2$
 指数の大小を調べると $-2 < 2 < 4$
 底 $\frac{1}{3}$ は 1 より小さいから $(\frac{1}{3})^{-2} > (\frac{1}{3})^2 > (\frac{1}{3})^4$

●次の 3 つの数の大小を不等号を用いて表せ。

(1) $3^3, 3^{-2}, 3^{-4}$
 指数の大小を調べると $-4 < -2 < 3$
 底 3 は 1 より大きいから $3^{-4} < 3^{-2} < 3^3$

(2) $(\frac{1}{5})^4, (\frac{1}{5})^3, (\frac{1}{5})^{3.5}$
 指数の大小を調べると $3 < 3.5 < 4$
 底 $\frac{1}{5}$ は 1 より小さいから $(\frac{1}{5})^3 > (\frac{1}{5})^{3.5} > (\frac{1}{5})^4$

(3) $2, \sqrt{8}, \sqrt[5]{16}$
 $2 = 2^1, \sqrt{8} = \sqrt{2^3} = 2^{\frac{3}{2}}, \sqrt[5]{16} = \sqrt[5]{2^4} = 2^{\frac{4}{5}}$
 指数の大小を調べると $\frac{4}{5} < 1 < \frac{3}{2}$
 底 2 は 1 より大きいから $2^{\frac{4}{5}} < 2^1 < 2^{\frac{3}{2}}$ すなわち $\sqrt[5]{16} < 2 < \sqrt{8}$

(4) $7^{-1}, 7^3, 7^{-1.5}$
 指数の大小を調べると $-1.5 < -1 < 3$
 底 7 は 1 より大きいから $7^{-1.5} < 7^{-1} < 7^3$

(5) $(0.4)^{-2}, (0.4)^{-3}, 1$
 $1 = (0.4)^0$ である。
 指数の大小を調べると $-3 < -2 < 0$
 底 0.4 は 1 より小さいから $(0.4)^{-3} > (0.4)^{-2} > (0.4)^0$ すなわち $(0.4)^{-3} > (0.4)^{-2} > 1$

(6) $\sqrt[3]{9}, \sqrt[4]{27}, \sqrt[3]{81}$
 $\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{3^2} = 3^{\frac{2}{3}}, \sqrt[4]{27} = \sqrt[4]{3^3} = 3^{\frac{3}{4}}, \sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{3^4} = 3^{\frac{4}{3}}$
 指数の大小を調べると $\frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{4}{3}$
 底 3 は 1 より大きいから $3^{\frac{2}{3}} < 3^{\frac{3}{4}} < 3^{\frac{4}{3}}$ すなわち $\sqrt[3]{9} < \sqrt[4]{27} < \sqrt[3]{81}$

7 例 次の方程式を解きなさい。

$4^x = 8$
 解答 $4^x = (2^2)^x = 2^{2x}, 8 = 2^3$ であるから、方程式は $2^{2x} = 2^3$
 よって $2x = 3$
 したがって $x = \frac{3}{2}$

●次の方程式を解きなさい。

(1) $2^x = 32$
 $2^x = 32$ から $2^x = 2^5$
 よって $x = 5$

(2) $(\frac{1}{2})^x = \frac{1}{64}$
 $(\frac{1}{2})^x = \frac{1}{64}$ から $(\frac{1}{2})^x = (\frac{1}{2})^6$
 よって $x = 6$
 別解 $(\frac{1}{2})^x = \frac{1}{64}$ から $2^{-x} = 2^{-6}$
 よって $-x = -6$
 ゆえに $x = 6$

(3) $2^x = 4\sqrt{2}$
 $2^x = 4\sqrt{2}$ から $2^x = 2^{\frac{5}{2}}$
 よって $x = \frac{5}{2}$

(4) $(\frac{1}{10})^x = \frac{1}{10\sqrt{10}}$
 $(\frac{1}{10})^x = \frac{1}{10\sqrt{10}}$ から $(\frac{1}{10})^x = (\frac{1}{10})^{\frac{3}{2}}$
 よって $x = \frac{3}{2}$
 別解 $(\frac{1}{10})^x = \frac{1}{10\sqrt{10}}$ から
 $10^{-x} = 10^{-\frac{3}{2}}$
 よって $-x = -\frac{3}{2}$
 ゆえに $x = \frac{3}{2}$

(5) $9^x = \frac{1}{3}$
 $9^x = \frac{1}{3}$ から $3^{2x} = 3^{-1}$
 よって $2x = -1$
 ゆえに $x = -\frac{1}{2}$

(6) $16^x = \sqrt{2}$
 $16^x = \sqrt{2}$ から $2^{4x} = 2^{\frac{1}{2}}$
 よって $4x = \frac{1}{2}$
 ゆえに $x = \frac{1}{8}$

(7) $2^{2x-1} = \frac{1}{8}$
 $2^{2x-1} = \frac{1}{8}$ から $2^{2x-1} = 2^{-3}$
 よって $2x-1 = -3$
 ゆえに $x = -1$

(8) $3^{2-3x} = \frac{1}{81}$
 $3^{2-3x} = \frac{1}{81}$ から $3^{2-3x} = 3^{-4}$
 よって $2-3x = -4$
 ゆえに $x = 2$