数学補習授業１１回目（その２：解説）

学籍番号（　　　　　　　　　　）　名前（　　　　　　　　　　）

1 **例**　指数が正の整数のとき，次の計算をせよ。

(1) $a^4 \times a^6 = a^{4+6} = a^{10}$　　(2) $(a^3)^4 = a^{3\times4} = a^{12}$

(3) $(a^3b)^2 = (a^3)^2 \times b^2 = a^6b^2$　　(4) $a^7 \div a^4 = a^{7-4} = a^3$

指数が 0 や負の整数のとき，次の計算をせよ。

(5) $6^0 = 1$　　(6) $2^{-5} = \dfrac{1}{2^5} = \dfrac{1}{32}$

(7) $a^{-4} \times a^{-2} = a^{-4+(-2)} = a^{-6} = \dfrac{1}{a^6}$　　(8) $\dfrac{a^{-3}}{a^2} = a^{-3-2} = a^{-5} = \dfrac{1}{a^5}$

●次の計算をせよ。

(1) $a^2 \times 3a^3$

$a^2 \times 3a^3 = 3a^{2+3} = 3a^5$

(2) $(a^6)^4$

$(a^6)^4 = a^{6\times4} = a^{24}$

(3) $(a^2b)^2$

$(a^2b)^2 = (a^2)^2b^2 = a^4b^2$

(4) $(a^2)^4 \div a^5$

$(a^2)^4 \div a^5 = a^8 \div a^5 = a^{8-5} = a^3$

●次の計算をせよ。

(1) $2^2 \times 2^3$

$2^2 \times 2^3 = 2^{2+3} = 2^5 = 32$

(2) $4^5 \div 4^3$

$4^5 \div 4^3 = 4^{5-3} = 4^2 = 16$

(3) $(3^6)^4 \div (3^4)^5$

$(3^6)^4 \div (3^4)^5 = 3^{6\times4} \div 3^{4\times5} = 3^{24} \div 3^{20}$

$= 3^{24-20} = 3^4 = 81$

(4) $3^2 \times 3^5 \div 3^4$

$3^2 \times 3^5 \div 3^4 = 3^{2+5-4} = 3^3 = 27$

(5) $10^4 \div 10^5 \times (10^2)^2$

$10^4 \div 10^5 \times (10^2)^2 = 10^4 \div 10^5 \times 10^{2\times2}$

$= 10^4 \div 10^5 \times 10^4$

$= 10^{4-5+4} = 10^3 = 1000$

(6) $(7^6)^5 \times 7^4 \div 7^{32}$

$(7^6)^5 \times 7^4 \div 7^{32} = 7^{6\times5} \times 7^4 \div 7^{32}$

$= 7^{30} \times 7^4 \div 7^{32} = 7^{30+4-32}$

$= 7^2 = 49$

●次の計算をせよ。

(1) 7^0

$7^0 = 1$

(2) 8^{-2}

$8^{-2} = \dfrac{1}{8^2} = \dfrac{1}{64}$

(3) $2^8 \times 2^{-5}$

$2^8 \times 2^{-5} = 2^{8+(-5)} = 2^3 = 8$

(4) $(3^{-2})^{-3}$

$(3^{-2})^{-3} = 3^{-2\times(-3)} = 3^6 = 729$

(5) $5^{-4} \times 5^6$

$5^{-4} \times 5^6 = 5^{-4+6} = 5^2 = 25$

(6) $9^{-4} \times 9^6 \div 9^2$

$9^{-4} \times 9^6 \div 9^2 = 9^{-4+6-2} = 9^0 = 1$

2 **例**　次の計算をせよ。

(1) $\sqrt[4]{5} \times \sqrt[4]{125} = \sqrt[4]{5\times5^3} = \sqrt[4]{5^4} = 5$　　(2) $\dfrac{\sqrt[3]{250}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\dfrac{250}{2}} = \sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5$

(3) $(\sqrt[8]{9})^4 = \sqrt[8]{9^4} = \sqrt[8]{(3^2)^4} = \sqrt[8]{3^8} = 3$　　(4) $\sqrt[4]{\sqrt{256}} = \sqrt[4\times2]{256} = \sqrt[8]{2^8} = 2$

次の数を簡単にせよ。

(5) $81^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$　　(6) $16^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{16})^3 = 4^3 = 64$

(7) $32^{-\frac{1}{5}} = \dfrac{1}{32^{\frac{1}{5}}} = \dfrac{1}{\sqrt[5]{32}} = \dfrac{1}{\sqrt[5]{2^5}} = \dfrac{1}{2}$

次の数を $a^{\frac{m}{n}}$ の形で表せ。

(8) $\sqrt[4]{7^3} = 7^{\frac{3}{4}}$　　(9) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{10^2}} = \dfrac{1}{10^{\frac{2}{3}}} = 10^{-\frac{2}{3}}$

次の計算をせよ。

(10) $4^{\frac{2}{3}} \times 4^{\frac{4}{3}} = 4^{\frac{2}{3}+\frac{4}{3}} = 4^{\frac{6}{3}} = 4^2 = 16$　　(11) $2^{\frac{5}{2}} \div 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{5}{2}-\frac{1}{2}} = 2^{\frac{4}{2}} = 2^2 = 4$

(12) $\sqrt[3]{3} \times \sqrt{3^3} \div \sqrt[6]{3^5} = 3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{3}{2}} \div 3^{\frac{5}{6}}$

$= 3^{\frac{1}{3}+\frac{3}{2}-\frac{5}{6}} = 3^{\frac{2}{6}+\frac{9}{6}-\frac{5}{6}}$

$= 3^{\frac{6}{6}} = 3^1 = 3$

●次の $\square$ に適する数を入れよ。

(1) $3^3 = 27$ であるから，$\boxed{3}$ は 27 の 3 乗根である。

(2) $4^4 = 256$，$(-4)^4 = 256$ であるから，4 と -4 は 256 の $\boxed{4}$ 乗根である。

(3) $(-4)^3 = -64$ であるから，-4 は $\boxed{-64}$ の 3 乗根である。

●次の数を簡単にせよ。

(1) $\sqrt[6]{1}$

$1^6 = 1$ であるから　$\sqrt[6]{1} = 1$

(2) $\sqrt[4]{16}$

$2^4 = 16$ であるから　$\sqrt[4]{16} = 2$

(3) $\sqrt[5]{243}$

$3^5 = 243$ であるから　$\sqrt[5]{243} = 3$

(4) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{125}}$

$\left(\dfrac{1}{5}\right)^3 = \dfrac{1}{125}$ であるから　$\sqrt[3]{\dfrac{1}{125}} = \dfrac{1}{5}$

(5) $\sqrt[6]{\dfrac{1}{64}}$

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^6 = \dfrac{1}{64}$ であるから　$\sqrt[6]{\dfrac{1}{64}} = \dfrac{1}{2}$

(6) $\sqrt[4]{\dfrac{16}{81}}$

$\left(\dfrac{2}{3}\right)^4 = \dfrac{16}{81}$ であるから　$\sqrt[4]{\dfrac{16}{81}} = \dfrac{2}{3}$

●次の計算をせよ。

(1) $\sqrt[4]{4} \times \sqrt[4]{64}$

$\sqrt[4]{4} \times \sqrt[4]{64} = \sqrt[4]{4\times4^3} = \sqrt[4]{4^4} = 4$

(2) $\sqrt[3]{32} \times \sqrt[3]{2}$

$\sqrt[3]{32} \times \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2^5\times2} = \sqrt[3]{2^6} = \sqrt[3]{4^3} = 4$

(3) $\dfrac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}$

$\dfrac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{\dfrac{81}{3}} = \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$

(4) $\dfrac{\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{640}}$

$\dfrac{\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{640}} = \sqrt[3]{\dfrac{10}{640}} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{64}}$

$= \sqrt[3]{\left(\dfrac{1}{4}\right)^3} = \dfrac{1}{4}$

(5) $(\sqrt[6]{4})^3$

$(\sqrt[6]{4})^3 = \sqrt[6]{4^3} = \sqrt[6]{2^6} = 2$

(6) $\sqrt[3]{\sqrt{3^6}}$

$\sqrt[3]{\sqrt{3^6}} = \sqrt[3\times2]{3^6} = \sqrt[6]{3^6} = 3$

●次の数を簡単にせよ。

(1) $27^{\frac{1}{3}}$

$27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$

(2) $125^{\frac{2}{3}}$

$125^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{125})^2 = (\sqrt[3]{5^3})^2 = 5^2 = 25$

(3) $16^{-\frac{5}{4}}$

$16^{-\frac{5}{4}} = \dfrac{1}{16^{\frac{5}{4}}} = \dfrac{1}{(\sqrt[4]{16})^5} = \dfrac{1}{(\sqrt[4]{2^4})^5}$

$= \dfrac{1}{2^5} = \dfrac{1}{32}$

●次の数を $a^{\frac{m}{n}}$ の形で表せ。ただし，a は最も小さい正の整数とする。

(1) $\sqrt[3]{3^5}$

$\sqrt[3]{3^5} = 3^{\frac{5}{3}}$

(2) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5^2}}$

$\dfrac{1}{\sqrt[3]{5^2}} = \dfrac{1}{5^{\frac{2}{3}}} = 5^{-\frac{2}{3}}$

(3) $\sqrt{6^3}$

$\sqrt{6^3} = 6^{\frac{3}{2}}$

●次の計算をせよ。

(1) $3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{3}{2}}$

$3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{3}{2}} = 3^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}} = 3^{\frac{4}{2}} = 3^2 = 9$

(2) $9^{\frac{3}{4}} \div 9^{-\frac{1}{4}}$

$9^{\frac{3}{4}} \div 9^{-\frac{1}{4}} = 9^{\frac{3}{4}-\left(-\frac{1}{4}\right)} = 9^{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}} = 9^{\frac{4}{4}} = 9^1 = 9$

(3) $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[6]{2} \div \sqrt{2^3}$

$\sqrt[3]{2} \times \sqrt[6]{2} \div \sqrt{2^3} = 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{6}} \div 2^{\frac{3}{2}}$

$= 2^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}-\frac{3}{2}} = 2^{\frac{2}{6}+\frac{1}{6}-\frac{9}{6}}$

$= 2^{-\frac{6}{6}} = 2^{-1} = \dfrac{1}{2}$

(4) $\sqrt[4]{3^3} \times \sqrt{3^3} \div \sqrt[4]{3}$

$\sqrt[4]{3^3} \times \sqrt{3^3} \div \sqrt[4]{3} = 3^{\frac{3}{4}} \times 3^{\frac{3}{2}} \div 3^{\frac{1}{4}}$

$= 3^{\frac{3}{4}+\frac{3}{2}-\frac{1}{4}} = 3^{\frac{3}{4}+\frac{6}{4}-\frac{1}{4}}$

$= 3^{\frac{8}{4}} = 3^2 = 9$

3 ●次の計算をしなさい。

(1) $3^{\frac{1}{3}}\times 3^{\frac{5}{3}}$

$3^{\frac{1}{3}}\times 3^{\frac{5}{3}}=3^{\frac{1}{3}+\frac{5}{3}}=3^2=9$

(2) $2^{\frac{1}{2}}\div 2^{\frac{9}{2}}$

$2^{\frac{1}{2}}\div 2^{\frac{9}{2}}=2^{\frac{1}{2}-\frac{9}{2}}=2^{-4}=\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}$

(3) $\sqrt[3]{32}\times\sqrt[6]{4}$

$\sqrt[3]{32}\times\sqrt[6]{4}=32^{\frac{1}{3}}\times 4^{\frac{1}{6}}=(2^5)^{\frac{1}{3}}\times(2^2)^{\frac{1}{6}}$

$=2^{\frac{5}{3}}\times 2^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{5}{3}+\frac{1}{3}}=2^2=4$

(4) $\sqrt[6]{27}\div\sqrt[4]{9}$

$\sqrt[6]{27}\div\sqrt[4]{9}=27^{\frac{1}{6}}\div 9^{\frac{1}{4}}=(3^3)^{\frac{1}{6}}\div(3^2)^{\frac{1}{4}}$

$=3^{\frac{1}{2}}\div 3^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}=3^0=1$

(5) $3^{\frac{1}{3}}\times 3^{\frac{5}{2}}\div 3^{\frac{5}{6}}$

$3^{\frac{1}{3}}\times 3^{\frac{5}{2}}\div 3^{\frac{5}{6}}=3^{\frac{1}{3}+\frac{5}{2}-\frac{5}{6}}=3^{\frac{2+15-5}{6}}$

$=3^2=9$

(6) $8^{-\frac{2}{3}}\times 4^{\frac{3}{2}}\div 2$

$8^{-\frac{2}{3}}\times 4^{\frac{3}{2}}\div 2=(2^3)^{-\frac{2}{3}}\times(2^2)^{\frac{3}{2}}\div 2$

$=2^{3\times(-\frac{2}{3})}\times 2^{2\times\frac{3}{2}}\div 2$

$=2^{-2}\times 2^3\div 2=2^{-2+3-1}$

$=2^0=1$

(7) $\sqrt[3]{7}\times\sqrt{7}\times\sqrt[6]{7}$

$\sqrt[3]{7}\times\sqrt{7}\times\sqrt[6]{7}=7^{\frac{1}{3}}\times 7^{\frac{1}{2}}\times 7^{\frac{1}{6}}$

$=7^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}}=7^{\frac{2+3+1}{6}}$

$=7^1=7$

(8) $\sqrt[3]{4}\times\sqrt[12]{2}\div\sqrt[4]{8}$

$\sqrt[3]{4}\times\sqrt[12]{2}\div\sqrt[4]{8}$

$=(2^2)^{\frac{1}{3}}\times 2^{\frac{1}{12}}\div(2^3)^{\frac{1}{4}}$

$=2^{2\times\frac{1}{3}}\times 2^{\frac{1}{12}}\div 2^{3\times\frac{1}{4}}$

$=2^{\frac{2}{3}}\times 2^{\frac{1}{12}}\div 2^{\frac{3}{4}}=2^{\frac{2}{3}+\frac{1}{12}-\frac{3}{4}}$

$=2^{\frac{8+1-9}{12}}=2^0=1$

(9) $\sqrt[4]{25}\times\sqrt[12]{25}\div\sqrt[3]{25}$

$\sqrt[4]{25}\times\sqrt[12]{25}\div\sqrt[3]{25}$

$=25^{\frac{1}{4}}\times 25^{\frac{1}{12}}\div 25^{\frac{1}{3}}=25^{\frac{1}{4}+\frac{1}{12}-\frac{1}{3}}$

$=25^{\frac{3+1-4}{12}}=25^0=1$

(10) $\sqrt{8}\times\sqrt[6]{32}\times\sqrt[3]{4}$

$\sqrt{8}\times\sqrt[6]{32}\times\sqrt[3]{4}$

$=(2^3)^{\frac{1}{2}}\times(2^5)^{\frac{1}{6}}\times(2^2)^{\frac{1}{3}}$

$=2^{3\times\frac{1}{2}}\times 2^{5\times\frac{1}{6}}\times 2^{2\times\frac{1}{3}}$

$=2^{\frac{3}{2}}\times 2^{\frac{5}{6}}\times 2^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{3}{2}+\frac{5}{6}+\frac{2}{3}}$

$=2^{\frac{9+5+4}{6}}=2^3=8$

4 例　次の関数のグラフをかけ。

(1) $y=5^x$

$y=5^x$ のグラフは，点 (0, 1) を通り，右上がりの曲線である。

また，x 軸はこのグラフの漸近線である。

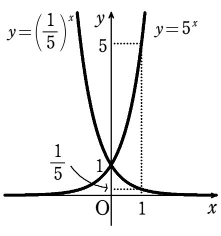
グラフは右の図のようになる。

(2) $y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$

$y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$ のグラフは，点 (0, 1) を通り，右下がりの曲線である。

また，x 軸はこのグラフの漸近線である。

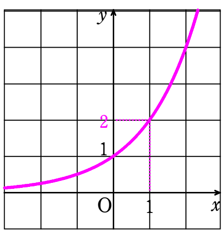
グラフは右の図のようになる。



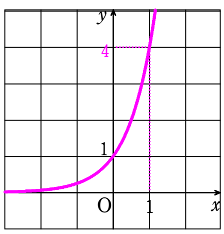
参考　$y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$ のグラフは，$y=5^x$ のグラフと，y 軸について対称である。

●次の関数のグラフをかけ。

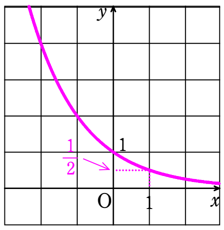
(1) $y=2^x$



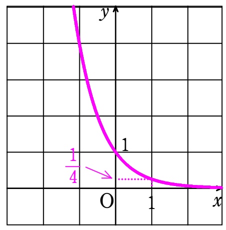
(2) $y=4^x$



(3) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$



(4) $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$



5 例　次の数の大小を調べよ。

$5^2,\ 5^{-2},\ 5^{-\frac{4}{3}}$

指数の大小を調べると　　$-2<-\frac{4}{3}<2$

底 5 は 1 より大きいから　　$5^{-2}<5^{-\frac{4}{3}}<5^2$

例　次の方程式を解け。

$9^x=27$

$9^x=(3^2)^x=3^{2x}$，$27=3^3$ であるから，方程式は　　$3^{2x}=3^3$

よって　　$2x=3$　　したがって　　$x=\frac{3}{2}$

●次の数の大小を調べよ。

(1) $4^2,\ 4^{-5},\ 4^0$

指数の大小を調べると　　$-5<0<2$

底 4 は 1 より大きいから

$4^{-5}<4^0<4^2$

(2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}},\ \left(\frac{1}{3}\right)^2,\ \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$

指数の大小を調べると　　$-2<\frac{1}{3}<2$

底 $\frac{1}{3}$ は 1 より小さいから

$\left(\frac{1}{3}\right)^2<\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}<\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$

●次の方程式を解け。

(1) $7^x=49$

$49=7^2$ であるから，

方程式は　　$7^x=7^2$

よって　　$x=2$

(2) $27^x=9$

$27^x=(3^3)^x=3^{3x}$，$9=3^2$ であるから，

方程式は　　$3^{3x}=3^2$

よって　　$3x=2$

したがって　　$x=\frac{2}{3}$

(3) $16^x=512$

$16^x=(2^4)^x=2^{4x}$，$512=2^9$ であるから，

方程式は　　$2^{4x}=2^9$

よって　　$4x=9$

したがって　　$x=\frac{9}{4}$

6 例　次の方程式，不等式を解け。

(1) $4^x-2^{x+2}-32=0$

方程式を変形すると

$(2^2)^x-2^x\cdot 2^2-32=0$

すなわち　　$(2^x)^2-4\cdot 2^x-32=0$

$2^x=t$ とおくと　　$t^2-4t-32=0$

よって　　$(t+4)(t-8)=0$

$t>0$ であるから　　$t=8$

すなわち　　$2^x=2^3$

したがって　$x=3$

(2) $9^x-8\cdot 3^x-9\geqq 0$

不等式を変形すると　$(3^2)^x-8\cdot 3^x-9\geqq 0$

すなわち　　$(3^x)^2-8\cdot 3^x-9\geqq 0$

$3^x=t$ とおくと　　$t^2-8t-9\geqq 0$

よって　　$(t+1)(t-9)\geqq 0$

$t>0$ であるから　　$t\geqq 9$

すなわち　　$3^x\geqq 3^2$

底 3 は 1 より大きいから　　$x\geqq 2$

●次の方程式，不等式を解け。

(1) $9^x+3^x-2=0$

$9^x+3^x-2=0$ を変形すると

$(3^2)^x+3^x-2=0$

すなわち　$(3^x)^2+3^x-2=0$

$3^x=t$ とおくと　　$t^2+t-2=0$

よって　　$(t-1)(t+2)=0$

$t>0$ であるから　　$t=1$

すなわち　　$3^x=3^0$

したがって　$x=0$

(2) $4^x-2^{x+1}-8<0$

$4^x-2^{x+1}-8<0$ を変形すると

$(2^2)^x-2\cdot 2^x-8<0$

すなわち　$(2^x)^2-2\cdot 2^x-8<0$

$2^x=t$ とおくと　　$t^2-2t-8<0$

よって　　$(t+2)(t-4)<0$

$t>0$ であるから　　$0<t<4$

すなわち　　$0<2^x<2^2$

底 2 は 1 より大きいから　　$x<2$