$\boxed{1}$ ●次の関数を微分せよ。

(1)　$y=\log x$

$y'=\dfrac{1}{x}$

(2)　$y=\log(2x+3)$

$y'=\dfrac{1}{2x+3}\cdot(2x+3)'$

$=\dfrac{2}{2x+3}$

(3)　$y=\log(x^2-3x)$

$y'=\dfrac{1}{x^2-3x}\cdot(x^2-3x)'$

$=\dfrac{2x-3}{x^2-3x}$

(4)　$y=(\log x)^2$

$y'=2\log x(\log x)'$

$=\dfrac{2\log x}{x}$

(5)　$y=x+\log x$

$y'=1+\dfrac{1}{x}$

(6)　$y=x\log x$

$y'=(x)'\log x+x(\log x)'$

$=\log x+x\cdot\dfrac{1}{x}$

$=\log x+1$

$\boxed{2}$ ●次の関数を微分せよ。

(1)　$y=e^x$

$y'=e^x$

(2)　$y=e^{2x+3}$

$y'=e^{2x+3}\cdot(2x+3)'$

$=2e^{2x+3}$

(3)　$y=e^{x^2+1}$

$y'=e^{x^2+1}\cdot(x^2+1)'$

$=2xe^{x^2+1}$

(4)　$y=xe^{2x}$

$y'=(x)'e^{2x}+x(e^{2x})'$

$=e^{2x}+x\cdot e^{2x}\cdot(2x)'$

$=e^{2x}+2xe^{2x}$

$=(1+2x)e^{2x}$

(5)　$y=(e^x)^2$

$(e^x)^2=e^{2x}$ であるから

$y'=e^{2x}\cdot(2x)'$

$=2e^{2x}$

(6)　$y=e^x\cos x$

$y'=(e^x)'\cos x+e^x(\cos x)'$

$=e^x\cos x-e^x\sin x$

$=(\cos x-\sin x)e^x$

$\boxed{3}$ 例　次の関数を微分せよ。

(1)　$y=\log(5x-1)$

$y'=\dfrac{1}{5x-1}\cdot(5x-1)'=\dfrac{5}{5x-1}$

(2)　$y=\log_2|3x|$

$y'=\dfrac{1}{3x\log 2}\cdot(3x)'=\dfrac{3}{3x\log 2}=\dfrac{1}{x\log 2}$

●次の関数を微分せよ。

(1)　$y=\log(3x+1)$

$y'=\dfrac{1}{3x+1}\cdot(3x+1)'=\dfrac{3}{3x+1}$

(2)　$y=\log_2(3x-1)$

$y'=\dfrac{1}{(3x-1)\log 2}\cdot(3x-1)'$

$=\dfrac{3}{(3x-1)\log 2}$

(3)　$y=x^3\log x$

$y'=(x^3)'\log x+x^3(\log x)'$

$=3x^2\log x+x^3\cdot\dfrac{1}{x}=x^2(3\log x+1)$

●次の関数を微分せよ。

(1)　$y=\log(4-x^2)$

$y'=\dfrac{1}{4-x^2}\cdot(4-x^2)'=\dfrac{-2x}{4-x^2}=\dfrac{2x}{x^2-4}$

(2)　$y=\log_4(3x^2+x)$

$y'=\dfrac{1}{(3x^2+x)\log 4}\cdot(3x^2+x)'$

$=\dfrac{6x+1}{(3x^2+x)\log 4}$

(3)　$y=x\log_5(x+1)$

$y'=(x)'\log_5(x+1)+x\{\log_5(x+1)\}'$

$=\log_5(x+1)+x\cdot\dfrac{(x+1)'}{(x+1)\log 5}$

$=\log_5(x+1)+\dfrac{x}{(x+1)\log 5}$

$\boxed{4}$ 例　次の関数を微分せよ。

(1)　$y=e^{-4x}$

$y'=e^{-4x}\cdot(-4x)'=-4e^{-4x}$

(2)　$y=x^2 3^x$

$y'=(x^2)'3^x+x^2(3^x)'=2x\cdot 3^x+x^2\cdot 3^x\log 3$

$=x\cdot 3^x(2+x\log 3)$

●次の関数を微分せよ。

(1)　$y=e^{6x}$

$y'=e^{6x}\cdot(6x)'=6e^{6x}$

(2)　$y=5^x$

$y'=5^x\log 5$

(3)　$y=x^2e^x$

$y'=(x^2)'e^x+x^2(e^x)'=2xe^x+x^2e^x$

$=xe^x(x+2)$

(4)　$y=\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}$

$y'=-\dfrac{(e^x+e^{-x})'}{(e^x+e^{-x})^2}=-\dfrac{(e^x)'+(e^{-x})'}{(e^x+e^{-x})^2}$

$=-\dfrac{e^x-e^{-x}}{(e^x+e^{-x})^2}$

●次の関数を微分せよ。

(1)　$y=e^{-x^2+1}$

$y'=e^{-x^2+1}\cdot(-x^2+1)'=e^{-x^2+1}\cdot(-2x)$

$=-2xe^{-x^2+1}$

(2)　$y=3^{-2x^2}$

$y'=3^{-2x^2}\log 3\cdot(-2x^2)'$

$=3^{-2x^2}\log 3\cdot(-4x)$

$=-4x\cdot 3^{-2x^2}\log 3$

(3)　$y=(3x+1)2^x$

$y'=(3x+1)'2^x+(3x+1)(2^x)'$

$=3\cdot 2^x+(3x+1)2^x\log 2$

$=2^x\{3+(3x+1)\log 2\}$

$=2^x(3x\log 2+3+\log 2)$

(4)　$y=\dfrac{e^x}{e^x-1}$

$y'=\dfrac{(e^x)'(e^x-1)-e^x(e^x-1)'}{(e^x-1)^2}$

$=\dfrac{e^x(e^x-1)-e^xe^x}{(e^x-1)^2}=-\dfrac{e^x}{(e^x-1)^2}$

$\boxed{5}$ 例　曲線 $y=\dfrac{1}{x^2}$ 上の点 (1, 1) における接線の方程式を求めよ。

$f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ とすると　$f'(x)=-\dfrac{2}{x^3}$

よって　$f'(1)=-2$

したがって，求める接線の方程式は　$y-1=-2(x-1)$

すなわち　$y=-2x+3$

●次の曲線上の点 A における接線の方程式を求めよ。

(1)　$y=\sqrt{x+2}$，A (7, 3)

$f(x)=\sqrt{x+2}$ とすると

$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}$

よって　$f'(7)=\dfrac{1}{2\sqrt{9}}=\dfrac{1}{6}$

したがって，求める接線の方程式は

$y-3=\dfrac{1}{6}(x-7)$

すなわち　$y=\dfrac{1}{6}x+\dfrac{11}{6}$

(2)　$y=2^x$，A (0, 1)

$f(x)=2^x$ とすると　$f'(x)=2^x\log 2$

よって　$f'(0)=2^0\cdot\log 2=\log 2$

したがって，求める接線の方程式は

$y-1=\log 2\cdot(x-0)$

すなわち　$y=x\log 2+1$

数学補習授業１３回目（その１：解説）　　　学籍番号(　　　　　　)　名前(　　　　　　)

6 例　曲線 $y=\sqrt{x-1}$ について，次のような接線の方程式を求めよ。

(1)　傾きが $\dfrac{1}{4}$　　　　(2)　原点を通る

$y=\sqrt{x-1}$ を微分すると　$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$

ここで，接点の座標を $(a,\ \sqrt{a-1})$ とすると，接線の方程式は

$$y-\sqrt{a-1}=\frac{1}{2\sqrt{a-1}}(x-a)\quad\cdots\cdots ①$$

(1)　接線 ① の傾きが $\dfrac{1}{4}$ であるから　$\dfrac{1}{2\sqrt{a-1}}=\dfrac{1}{4}$

これを解くと　$a=5$

① に代入して整理すると　$y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{3}{4}$

(2)　接線 ① が原点 $(0,\ 0)$ を通るから　$0-\sqrt{a-1}=\dfrac{1}{2\sqrt{a-1}}(0-a)$

これを解くと　$a=2$

① に代入して整理すると　$y=\dfrac{1}{2}x$

●曲線 $y=e^{2x+1}$ について，傾きが 2 である接線の方程式を求めよ。

$y=e^{2x+1}$ を微分すると　$y'=2e^{2x+1}$

ここで，接点の座標を $(a,\ e^{2a+1})$ とすると，接線の方程式は

$$y-e^{2a+1}=2e^{2a+1}(x-a)\quad\cdots\cdots ①$$

接線 ① の傾きが 2 であるから　$2e^{2a+1}=2$

よって，$e^{2a+1}=1$ より，$2a+1=0$ であるから　$a=-\dfrac{1}{2}$

① に代入すると　$y-1=2\left\{x-\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right\}$　　整理して　$y=2x+2$

●曲線 $y=2\log x$ について，原点を通る接線の方程式を求めよ。

$y=2\log x$ を微分すると　$y'=\dfrac{2}{x}$

ここで，接点の座標を $(a,\ 2\log a)$ とすると，接線の方程式は

$$y-2\log a=\frac{2}{a}(x-a)\quad\cdots\cdots ①$$

接線 ① が原点 $(0,\ 0)$ を通るから　$0-2\log a=\dfrac{2}{a}(0-a)$

よって，$\log a=1$ であるから　$a=e$

① に代入すると　$y-2=\dfrac{2}{e}(x-e)$　　整理して　$y=\dfrac{2}{e}x$

7 例　関数 $f(x)=x+\dfrac{3}{x}$ の極値を求めよ。

$f(x)$ の定義域は $x\neq 0$ である。

$$f'(x)=1-\frac{3}{x^2}=\frac{x^2-3}{x^2}=\frac{(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{x^2}$$

$f'(x)=0$ とすると　$x=-\sqrt{3},\ \sqrt{3}$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots\cdots$	0	$\cdots\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 $-2\sqrt{3}$	↘		↘	極小 $2\sqrt{3}$	↗

よって，$f(x)$ は

$x=-\sqrt{3}$ で極大値 $-2\sqrt{3}$，$x=\sqrt{3}$ で極小値 $2\sqrt{3}$ をとる。

●次の関数の極値を求めよ。

(1)　$f(x)=\dfrac{\log x}{x^2}$

$f(x)$ の定義域は $x>0$ である。

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x^2-\log x\cdot 2x}{x^4}=\frac{x-2x\log x}{x^4}=\frac{1-2\log x}{x^3}$$

$f'(x)=0$ とすると　$\log x=\dfrac{1}{2}$

よって　$x=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$

$f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	0	$\cdots\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	極大 $\dfrac{1}{2e}$	↘

よって，$f(x)$ は

$x=\sqrt{e}$ で極大値 $\dfrac{1}{2e}$ をとる。極小値はない。

(2)　$f(x)=x^3e^{-3x}$

$f'(x)=3x^2e^{-3x}+x^3(-3e^{-3x})=3x^2e^{-3x}(1-x)$

$f'(x)=0$ とすると　$x=0,\ 1$

$f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	$\cdots\cdots$	0	$\cdots\cdots$	1	$\cdots\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	0	↗	極大 $\dfrac{1}{e^3}$	↘

よって，$f(x)$ は

$x=1$ で極大値 $\dfrac{1}{e^3}$ をとる。

極小値はない。