1 例　関数 $y=(x^2+1)(2x^2-3)$ を微分せよ。

$$y'=(x^2+1)'(2x^2-3)+(x^2+1)(2x^2-3)'=2x(2x^2-3)+(x^2+1)\cdot 4x$$
$$=4x^3-6x+4x^3+4x=8x^3-2x$$

●次の関数を微分せよ。

(1) $y=x^8$

$y'=8x^7$

(2) $y=x^6+x^5$

$y'=6x^5+5x^4$

(3) $y=(x^2+2)(3x+4)$

$$y'=(x^2+2)'(3x+4)+(x^2+2)(3x+4)'$$
$$=2x(3x+4)+(x^2+2)\cdot 3$$
$$=6x^2+8x+3x^2+6$$
$$=9x^2+8x+6$$

(4) $y=(x^3+x)(x^2-2)$

$$y'=(x^3+x)'(x^2-2)+(x^3+x)(x^2-2)'$$
$$=(3x^2+1)(x^2-2)+(x^3+x)\cdot 2x$$
$$=3x^4-5x^2-2+2x^4+2x^2$$
$$=5x^4-3x^2-2$$

2 例　次の関数を微分せよ。

(1) $y=\dfrac{1}{2x-1}$

$$y'=-\frac{(2x-1)'}{(2x-1)^2}=-\frac{2}{(2x-1)^2}$$

(2) $y=\dfrac{x-1}{x^2+1}$

$$y'=\frac{(x-1)'(x^2+1)-(x-1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$$
$$=\frac{1\cdot(x^2+1)-(x-1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$$
$$=\frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$$

●次の関数を微分せよ。

(1) $y=\dfrac{1}{x^2-2}$

$$y'=-\frac{(x^2-2)'}{(x^2-2)^2}=-\frac{2x}{(x^2-2)^2}$$

(2) $y=\dfrac{x-1}{4x-3}$

$$y'=\frac{(x-1)'(4x-3)-(x-1)(4x-3)'}{(4x-3)^2}$$
$$=\frac{1\cdot(4x-3)-(x-1)\cdot 4}{(4x-3)^2}=\frac{1}{(4x-3)^2}$$

●関数 $y=\dfrac{1}{x^7}$ を微分せよ。

$y=x^{-7}$ であるから　　$y'=-7x^{-8}=-\dfrac{7}{x^8}$

●関数 $y=-\dfrac{3}{x^5}$ を微分せよ。

$y=-3x^{-5}$ であるから　　$y'=-3(-5x^{-6})=15x^{-6}=\dfrac{15}{x^6}$

3 例　関数 $y=(2x^2+3)^4$ を微分せよ。

(解答 1)　$u=2x^2+3$ とすると　　$y=u^4$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=4u^3\cdot 4x=16x(2x^2+3)^3$$

(解答 2)　$y'=4(2x^2+3)^3\cdot(2x^2+3)'=4(2x^2+3)^3\cdot 4x=16x(2x^2+3)^3$

●合成関数の微分法を用いて，関数 $y=(3x-1)^3$ を微分せよ。

$u=3x-1$ とすると　　$y=u^3$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=3u^2\cdot 3=9(3x-1)^2$$

●合成関数の微分法を用いて，関数 $y=(3x^2+x)^5$ を微分せよ。

$u=3x^2+x$ とすると　　$y=u^5$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=5u^4\cdot(6x+1)=5(3x^2+x)^4\cdot(6x+1)=5(6x+1)(3x^2+x)^4$$

●次の関数を微分せよ。

(1) $y=(x^2+2x+5)^2$

$$y'=2(x^2+2x+5)\cdot(x^2+2x+5)'$$
$$=2(x^2+2x+5)\cdot(2x+2)$$
$$=4(x+1)(x^2+2x+5)$$

(2) $y=\dfrac{1}{(2x+3)^3}$

$y=(2x+3)^{-3}$ であるから

$$y'=-3(2x+3)^{-4}\cdot(2x+3)'$$
$$=-3(2x+3)^{-4}\cdot 2=-\frac{6}{(2x+3)^4}$$

4 例　次の関数を微分せよ。

(1) $y=\sqrt[5]{x}$

$$y'=\left(x^{\frac{1}{5}}\right)'=\frac{1}{5}x^{\frac{1}{5}-1}=\frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}=\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$$

(2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{5-x^2}}$

$$y'=\left\{(5-x^2)^{-\frac{1}{2}}\right\}'$$
$$=-\frac{1}{2}(5-x^2)^{-\frac{1}{2}-1}(5-x^2)'$$
$$=-\frac{1}{2}(5-x^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x)$$
$$=\frac{x}{(5-x^2)\sqrt{5-x^2}}$$

●次の関数を微分せよ。

(1) $y=\sqrt[10]{x}$

$$y'=\left(x^{\frac{1}{10}}\right)'=\frac{1}{10}x^{\frac{1}{10}-1}=\frac{1}{10}x^{-\frac{9}{10}}$$
$$=\frac{1}{10\sqrt[10]{x^9}}$$

(2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^5}}$

$$y'=\left(x^{-\frac{5}{2}}\right)'=-\frac{5}{2}x^{-\frac{5}{2}-1}=-\frac{5}{2}x^{-\frac{7}{2}}$$
$$=-\frac{5}{2x^3\sqrt{x}}$$

(3) $y=\sqrt[3]{x^2+2}$

$$y'=\left\{(x^2+2)^{\frac{1}{3}}\right\}'=\frac{1}{3}(x^2+2)^{\frac{1}{3}-1}(x^2+2)'$$
$$=\frac{1}{3}(x^2+2)^{-\frac{2}{3}}\cdot 2x=\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+2)^2}}$$

5 例　次の関数を微分せよ。

(1) $y=\log(5x-1)$

$$y'=\frac{1}{5x-1}\cdot(5x-1)'=\frac{5}{5x-1}$$

(2) $y=\log_2|3x|$

$$y'=\frac{1}{3x\log 2}\cdot(3x)'=\frac{3}{3x\log 2}=\frac{1}{x\log 2}$$

●次の関数を微分せよ。

(1) $y=\log(3x+1)$

$$y'=\frac{1}{3x+1}\cdot(3x+1)'=\frac{3}{3x+1}$$

(2) $y=\log_2(3x-1)$

$$y'=\frac{1}{(3x-1)\log 2}\cdot(3x-1)'$$
$$=\frac{3}{(3x-1)\log 2}$$

(3) $y=x^3\log x$

$$y'=(x^3)'\log x+x^3(\log x)'$$
$$=3x^2\log x+x^3\cdot\frac{1}{x}=x^2(3\log x+1)$$

●関数 $y=\log|x^2-7|$ を微分せよ。

$$y'=\frac{1}{x^2-7}\cdot(x^2-7)'=\frac{2x}{x^2-7}$$

●関数 $y=\log_3|x^2-5x|$ を微分せよ。

$$y'=\frac{1}{(x^2-5x)\log 3}\cdot(x^2-5x)'=\frac{2x-5}{(x^2-5x)\log 3}$$

6 例　次の関数を微分せよ。

(1) $y=e^{-4x}$

$$y'=e^{-4x}\cdot(-4x)'=-4e^{-4x}$$

(2) $y=x^2 3^x$

$$y'=(x^2)'3^x+x^2(3^x)'=2x\cdot 3^x+x^2\cdot 3^x\log 3$$
$$=x\cdot 3^x(2+x\log 3)$$

●次の関数を微分せよ。

(1) $y=e^{6x}$

$y'=e^{6x}\cdot(6x)'=6e^{6x}$

(2) $y=5^x$

$y'=5^x\log 5$

(3) $y=x^2e^x$

$$y'=(x^2)'e^x+x^2(e^x)'=2xe^x+x^2e^x$$
$$=xe^x(x+2)$$

(4) $y=\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}$

$$y'=-\frac{(e^x+e^{-x})'}{(e^x+e^{-x})^2}=-\frac{(e^x)'+(e^{-x})'}{(e^x+e^{-x})^2}$$
$$=-\frac{e^x-e^{-x}}{(e^x+e^{-x})^2}$$

数学補習授業１３回目（その２：解説）　　学籍番号（　　　　　　　　）　名前（　　　　　　　　　）

$\boxed{7}$ $\boxed{例}$ 次の関数を微分せよ。

(1) $y=\sin^3 x\cos 3x$

$y'=(\sin^3 x)'\cos 3x+\sin^3 x(\cos 3x)'=3\sin^2 x\cos x\cos 3x+\sin^3 x(-\sin 3x)\cdot 3$

$=3\sin^2 x(\cos x\cos 3x-\sin x\sin 3x)=3\sin^2 x\cos 4x$

(2) $y=\log\left|\dfrac{x-2}{x+2}\right|$

$y'=(\log|x-2|-\log|x+2|)'=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{4}{(x-2)(x+2)}$

●次の関数を微分せよ。

(1) $y=\sin^5 x\cos 5x$

$y'=(\sin^5 x)'\cos 5x+\sin^5 x(\cos 5x)'$

$=5\sin^4 x\cos x\cos 5x$

$+\sin^5 x(-\sin 5x)\cdot 5$

$=5\sin^4 x(\cos x\cos 5x-\sin x\sin 5x)$

$=5\sin^4 x\cos 6x$

(2) $y=\log\left|\dfrac{x+2}{x+3}\right|$

$y'=(\log|x+2|-\log|x+3|)'$

$=\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{1}{(x+2)(x+3)}$

(3) $y=(\log x)^3$

$y'=3(\log x)^2(\log x)'=\dfrac{3(\log x)^2}{x}$

●次の関数を微分せよ。

(1) $y=\dfrac{\sin x}{1-\cos x}$

$y'=\dfrac{(\sin x)'(1-\cos x)-\sin x(1-\cos x)'}{(1-\cos x)^2}$

$=\dfrac{\cos x(1-\cos x)-\sin^2 x}{(1-\cos x)^2}$

$=\dfrac{\cos x-(\cos^2 x+\sin^2 x)}{(1-\cos x)^2}$

$=\dfrac{\cos x-1}{(1-\cos x)^2}=\dfrac{1}{\cos x-1}$

(2) $y=\log\left|\dfrac{2x-1}{2x+1}\right|$

$y'=(\log|2x-1|-\log|2x+1|)'$

$=\dfrac{2}{2x-1}-\dfrac{2}{2x+1}$

$=\dfrac{2\{(2x+1)-(2x-1)\}}{(2x-1)(2x+1)}$

$=\dfrac{4}{(2x-1)(2x+1)}$

(3) $y=\sqrt{1-\sin x}$

$y'=\left\{(1-\sin x)^{\frac{1}{2}}\right\}'$

$=\dfrac{1}{2}(1-\sin x)^{-\frac{1}{2}}\cdot(1-\sin x)'$

$=-\dfrac{\cos x}{2\sqrt{1-\sin x}}$

$\boxed{8}$ 次の曲線上の点 A における接線の方程式を求めよ。

(1) $y=\dfrac{1}{x^3}$，A $(-1,\ -1)$

$f(x)=\dfrac{1}{x^3}$ とすると　$f'(x)=-\dfrac{3}{x^4}$

よって　$f'(-1)=-\dfrac{3}{(-1)^4}=-3$

したがって，求める接線の方程式は

$y-(-1)=-3\{x-(-1)\}$

すなわち　$y=-3x-4$

(2) $y=\sin x$，A $(\pi,\ 0)$

$f(x)=\sin x$ とすると　$f'(x)=\cos x$

よって　$f'(\pi)=\cos\pi=-1$

したがって，求める接線の方程式は

$y-0=-1\cdot(x-\pi)$

すなわち　$y=-x+\pi$

$\boxed{9}$ ●次の関数を微分せよ。

(1) $y=2\sin x$

$y'=2\cos x$

(2) $y=\sin 2x$

$y'=\cos 2x\cdot(2x)'$

$=2\cos 2x$

(3) $y=\sin^2 x$

$y'=2\sin x(\sin x)'$

$=2\sin x\cos x$

(4) $y=\sin x^4$

$y'=\cos x^4(x^4)'$

$=4x^3\cos x^4$

(5) $y=x+\sin x$

$y'=1+\cos x$

(6) $y=x\sin x$

$y'=(x)'\sin x+x(\sin x)'$

$=\sin x+x\cos x$

(7) $y=\sin x+\cos x$

$y'=\cos x-\sin x$

(8) $y=\sin x\cos x$

$y'=(\sin x)'\cos x+\sin x(\cos x)'$

$=\cos x\cdot\cos x+\sin x\cdot(-\sin x)$

$=\cos^2 x-\sin^2 x$

$=\cos 2x$

$\boxed{別解}$ $y=\sin x\cos x=\dfrac{1}{2}\sin 2x$

$y'=\dfrac{1}{2}\cdot\cos 2x\cdot 2=\cos 2x$

$\boxed{10}$ 次の関数の極値を求めよ。

(1) $f(x)=x^4-6x^2-8x$

$f'(x)=4x^3-12x-8=4(x^3-3x-2)=4(x+1)(x^2-x-2)=4(x+1)^2(x-2)$

$f'(x)=0$ とすると　$x=-1,\ 2$

$f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	……	-1	……	2	……
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	3	↘	極小 -24	↗

よって，$f(x)$ は

極大値はない。

$x=2$ で極小値 -24 をとる。

(2) $f(x)=\dfrac{\log x}{x^2}$

$f(x)$ の定義域は $x>0$ である。

$f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x^2-\log x\cdot 2x}{x^4}=\dfrac{x-2x\log x}{x^4}=\dfrac{1-2\log x}{x^3}$

$f'(x)=0$ とすると　$\log x=\dfrac{1}{2}$

よって　$x=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$

$f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	0	……	$\sqrt{e}$	……
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	極大 $\dfrac{1}{2e}$	↘

よって，$f(x)$ は

$x=\sqrt{e}$ で極大値 $\dfrac{1}{2e}$ をとる。極小値はない。

(3) $f(x)=x-\sin 2x$　$(0\leqq x\leqq\pi)$

$f'(x)=1-2\cos 2x$

$f'(x)=0$ とすると　$\cos 2x=\dfrac{1}{2}$

$0<x<\pi$ の範囲でこの等式を満たす x の値を求める。

$0<2x<2\pi$ であるから　$2x=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi$

よって　$x=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	……	$\dfrac{\pi}{6}$	……	$\dfrac{5}{6}\pi$	……	π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	極小 $\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	↗	極大 $\dfrac{5}{6}\pi+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	↘	π

よって，$f(x)$ は

$x=\dfrac{5}{6}\pi$ で極大値 $\dfrac{5}{6}\pi+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$x=\dfrac{\pi}{6}$ で極小値 $\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ をとる。