数学補習２授業８回目（解説）　　学籍番号(　　　)　名前(　　　)

1 例　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int\frac{x^2+3x+4}{x+2}dx$

$\dfrac{x^2+3x+4}{x+2}=x+1+\dfrac{2}{x+2}$ であるから

$\displaystyle\int\frac{x^2+3x+4}{x+2}dx$

$\displaystyle=\int\left(x+1+\frac{2}{x+2}\right)dx$

$=\dfrac{x^2}{2}+x+2\log|x+2|+C$

(C は積分定数，以下同じ)

(2) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-2x}$

$\dfrac{1}{x^2-2x}=\dfrac{1}{x(x-2)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x}\right)$

であるから

$\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-2x}$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x}\right)dx$

$=\dfrac{1}{2}(\log|x-2|-\log|x|)+C$

$=\dfrac{1}{2}\log\left|\dfrac{x-2}{x}\right|+C$

●不定積分 $\displaystyle\int\frac{x^3}{x-1}dx$ を求めよ。

$\dfrac{x^3}{x-1}=x^2+x+1+\dfrac{1}{x-1}$ であるから

$\displaystyle\int\frac{x^3}{x-1}dx=\int\left(x^2+x+1+\frac{1}{x-1}\right)dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\log|x-1|+C$

●不定積分 $\displaystyle\int\frac{3}{2x^2+x-1}dx$ を求めよ。

$\dfrac{3}{2x^2+x-1}=\dfrac{3}{(x+1)(2x-1)}=\dfrac{2}{2x-1}-\dfrac{1}{x+1}$ であるから

$\displaystyle\int\frac{3}{2x^2+x-1}dx=\int\left(\frac{2}{2x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx=\log|2x-1|-\log|x+1|+C$

$=\log\left|\dfrac{2x-1}{x+1}\right|+C$

2 ●次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int\frac{x+3}{x+1}dx$

(与式)$\displaystyle=\int\frac{(x+1)+2}{x+1}dx=\int\left(1+\frac{2}{x+1}\right)dx$

$=x+2\log|x+1|+C$　(C は積分定数，以下同様)

(2) $\displaystyle\int\frac{x^2+2x+4}{x-1}dx$

(与式)$\displaystyle=\int\frac{(x-1)(x+3)+7}{x-1}dx=\int\left(x+3+\frac{7}{x-1}\right)dx$

$=\dfrac{1}{2}x^2+3x+7\log|x-1|+C$

(3) $\displaystyle\int\frac{dx}{(x-2)(x+3)}$

(与式)$\displaystyle=\int\frac{1}{5}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+3}\right)dx$

$=\dfrac{1}{5}(\log|x-2|-\log|x+3|)+C$

$=\dfrac{1}{5}\log\left|\dfrac{x-2}{x+3}\right|+C$

(4) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+x-2}$

(与式)$\displaystyle=\int\frac{dx}{(x-1)(x+2)}=\int\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)dx$

$=\dfrac{1}{3}(\log|x-1|-\log|x+2|)+C=\dfrac{1}{3}\log\left|\dfrac{x-1}{x+2}\right|+C$

(5) $\displaystyle\int\frac{3x+1}{x^2-1}dx$

(与式)$\displaystyle=\int\frac{3x+1}{(x+1)(x-1)}dx=\int\left(\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-1}\right)dx$

$=\log|x+1|+2\log|x-1|+C=\log|x+1||x-1|^2+C$

$=\log|x+1|(x-1)^2+C$

3 ●次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int\frac{x+5}{x+2}dx$

(与式)$\displaystyle=\int\frac{(x+2)+3}{x+2}dx=\int\left(1+\frac{3}{x+2}\right)dx$

$=x+3\log|x+2|+C$　(C は積分定数，以下同様)

(2) $\displaystyle\int\frac{x^2-4x-2}{x-3}dx$

(与式)$\displaystyle=\int\frac{(x-3)(x-1)-5}{x-3}dx=\int\left(x-1-\frac{5}{x-3}\right)dx$

$=\dfrac{1}{2}x^2-x-5\log|x-3|+C$

(3) $\displaystyle\int\frac{dx}{(x-1)(x+3)}$

(与式)$\displaystyle=\int\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+3}\right)dx$

$=\dfrac{1}{4}(\log|x-1|-\log|x+3|)+C$

$=\dfrac{1}{4}\log\left|\dfrac{x-1}{x+3}\right|+C$

(4) $\int \frac{dx}{x^2-4x-5}$

(与式)$=\int \frac{dx}{(x+1)(x-5)}=\int \frac{1}{6}\left(\frac{1}{x-5}-\frac{1}{x+1}\right)dx$

$=\frac{1}{6}(\log|x-5|-\log|x+1|)+C$

$=\frac{1}{6}\log\left|\frac{x-5}{x+1}\right|+C$

(5) $\int \frac{5x-2}{x^2-4}dx$

(与式)$=\int \frac{5x-2}{(x+2)(x-2)}dx=\int\left(\frac{3}{x+2}+\frac{2}{x-2}\right)dx$

$=3\log|x+2|+2\log|x-2|+C=\log|x+2|^3|x-2|^2+C$

$=\log|x+2|^3(x-2)^2+C$

4 ●次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \frac{x+1}{\sqrt{1-3x}}dx$

$\sqrt{1-3x}=t$ とおくと，$1-3x=t^2$ から　$x=\frac{1-t^2}{3}$，$dx=\left(-\frac{2}{3}t\right)dt$

よって

(与式)$=\int \frac{\frac{1-t^2}{3}+1}{t}\cdot\left(-\frac{2}{3}t\right)dt=\frac{2}{9}\int(t^2-4)dt$

$=\frac{2}{9}\left(\frac{1}{3}t^3-4t\right)+C=\frac{2}{27}t(t^2-12)+C$

$=\frac{2}{27}\sqrt{1-3x}\{(1-3x)-12\}+C$

$=-\frac{2}{27}(3x+11)\sqrt{1-3x}+C$

(2) $\int \frac{x-1}{e^{x^2-2x}}dx$

$(x^2-2x)'=2x-2$ であるから，$x^2-2x=u$ とおくと

(与式)$=\frac{1}{2}\int\frac{(x^2-2x)'}{e^{x^2-2x}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{e^u}du=\frac{1}{2}\int e^{-u}du$

$=-\frac{1}{2}e^{-u}+C=-\frac{1}{2e^u}+C$

$=-\frac{1}{2e^{x^2-2x}}+C$

(3) $\int(4x+1)\sin 2x\,dx$

(与式)$=\int(4x+1)\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)'dx$

$=-\frac{1}{2}(4x+1)\cos 2x+\int 4\cdot\frac{1}{2}\cos 2x\,dx$

$=-\frac{1}{2}(4x+1)\cos 2x+2\int\cos 2x\,dx$

$=-\frac{1}{2}(4x+1)\cos 2x+\sin 2x+C$

5 ●次の不定積分を求めよ。

(1) $\int\left(\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2dx$

(与式)$=\int\left(x^{\frac{2}{3}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)^2dx=\int\left(x^{\frac{4}{3}}+2x^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}+x^{-1}\right)dx$

$=\int\left(x^{\frac{4}{3}}+2x^{\frac{1}{6}}+\frac{1}{x}\right)dx=\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}+\frac{12}{7}x^{\frac{7}{6}}+\log|x|+C$

$=\frac{3}{7}x^2\sqrt[3]{x}+\frac{12}{7}x\sqrt[6]{x}+\log|x|+C$ $\left(=\frac{3}{7}x^2\sqrt[3]{x}+\frac{12}{7}x\sqrt[6]{x}+\log x+C\right)$

(C は積分定数，以下同様)

注　被積分関数の形から $x>0$ であり，$\log|x|=\log x$ となる。

(2) $\int\sin^5 x\,dx$

(与式)$=\int(1-\cos^2 x)^2\sin x\,dx=\int(1-2\cos^2 x+\cos^4 x)\sin x\,dx$

$\cos x=t$ とおくと　$-\sin x\,dx=dt$

(与式)$=-\int(1-2t^2+t^4)dt=-\frac{1}{5}t^5+\frac{2}{3}t^3-t+C$

$=-\frac{1}{5}\cos^5 x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\cos x+C$

(3) $\int\frac{e^x}{e^{2x}-9}dx$

$e^x=t$ とおくと　$e^x dx=dt$

(与式)$=\int\frac{dt}{t^2-9}=\int\frac{dt}{(t+3)(t-3)}$

$=\int\frac{1}{6}\left(\frac{1}{t-3}-\frac{1}{t+3}\right)dt=\frac{1}{6}(\log|t-3|-\log|t+3|)+C$

$=\frac{1}{6}\log\left|\frac{t-3}{t+3}\right|+C=\frac{1}{6}\log\left|\frac{e^x-3}{e^x+3}\right|+C$ $\left(=\frac{1}{6}\log\frac{|e^x-3|}{e^x+3}+C\right)$