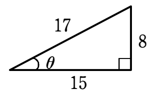
数学補習授業４回目（その２：解説）　　　　学籍番号(　　　　　　　　)　名前(　　　　　　　　　　　)

$\boxed{1}$ ●次の (1)〜(4) について，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。
また，(5)〜(8) について，x を θ を用いて表せ。

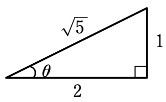
(1)



$\sin\theta=\frac{8}{17}$，$\cos\theta=\frac{15}{17}$，

$\tan\theta=\frac{8}{15}$

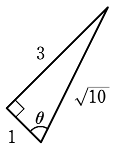
(2)



$\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$，$\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$，

$\tan\theta=\frac{1}{2}$

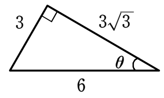
(3)



$\sin\theta=\frac{3}{\sqrt{10}}$，$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{10}}$，

$\tan\theta=\frac{3}{1}=3$

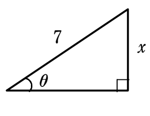
(4)



$\sin\theta=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$，$\cos\theta=\frac{3\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

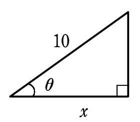
$\tan\theta=\frac{3}{3\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

(5)



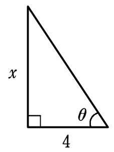
$x=7\sin\theta$

(6)



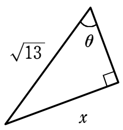
$x=10\cos\theta$

(7)



$x=4\tan\theta$

(8)

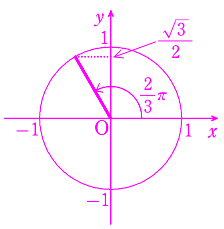


$x=\sqrt{13}\sin\theta$

$\boxed{2}$ ●次の値を求めよ。

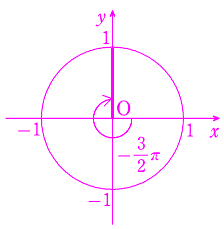
(1) $\sin\frac{2}{3}\pi$

$\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}$



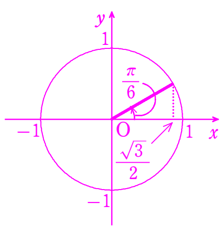
(2) $\sin\left(-\frac{3}{2}\pi\right)$

$\sin\left(-\frac{3}{2}\pi\right)=1$



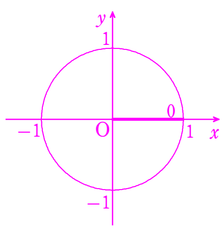
(3) $\cos\frac{\pi}{6}$

$\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$



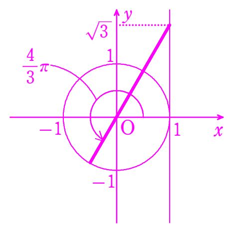
(4) $\cos 0$

$\cos 0=1$



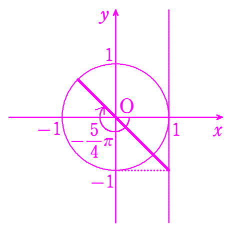
(5) $\tan\frac{4}{3}\pi$

$\tan\frac{4}{3}\pi=\sqrt{3}$



(6) $\tan\left(-\frac{5}{4}\pi\right)$

$\tan\left(-\frac{5}{4}\pi\right)=-1$



$\boxed{3}$ 例　$0^\circ<A<90^\circ$，$\cos A=\frac{3}{4}$ のとき，$\sin A$，$\tan A$ の値を求めます。

$\cos A=\frac{3}{4}$ を $\sin^2 A+\cos^2 A=1$ に代入すると　$\sin^2 A+\left(\frac{3}{4}\right)^2=1$

よって　$\sin^2 A=1-\left(\frac{3}{4}\right)^2=1-\frac{9}{16}=\frac{7}{16}$

$\sin A>0$ であるから　$\sin A=\sqrt{\frac{7}{16}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$

また　$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\sin A\div\cos A$

$=\frac{\sqrt{7}}{4}\div\frac{3}{4}=\frac{\sqrt{7}}{\cancel{4}}\times\frac{\cancel{4}}{3}=\frac{\sqrt{7}}{3}$

●次の値を求めなさい。

(1) $0^\circ<A<90^\circ$，$\sin A=\frac{1}{3}$ のとき，$\cos A$ と $\tan A$ の値

$\sin A=\frac{1}{3}$ を $\sin^2 A+\cos^2 A=1$ に代入すると　$\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cos^2 A=1$

よって　$\cos^2 A=1-\left(\frac{1}{3}\right)^2=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$

$\cos A>0$ であるから　$\cos A=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

また　$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\sin A\div\cos A$

$=\frac{1}{3}\div\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{1}{3}\times\frac{3}{2\sqrt{2}}$

$=\frac{1}{2\sqrt{2}}$

(2) $0^\circ<A<90^\circ$，$\cos A=\frac{1}{4}$ のとき，$\sin A$ と $\tan A$ の値

$\cos A=\frac{1}{4}$ を $\sin^2 A+\cos^2 A=1$ に代入すると　$\sin^2 A+\left(\frac{1}{4}\right)^2=1$

よって　$\sin^2 A=1-\left(\frac{1}{4}\right)^2=1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$

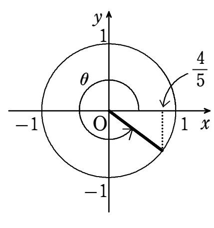
$\sin A>0$ であるから　$\sin A=\frac{\sqrt{15}}{4}$

また　$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\sin A\div\cos A$

$=\frac{\sqrt{15}}{4}\div\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{15}}{4}\times 4$

$=\sqrt{15}$

$\boxed{4}$ 例　θ の動径が第 4 象限にあり，$\cos\theta=\frac{4}{5}$ のとき，
$\sin\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めなさい。



解答　$\cos\theta=\frac{4}{5}$ を $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ に代入すると

$\sin^2\theta+\left(\frac{4}{5}\right)^2=1$

よって　$\sin^2\theta=1-\left(\frac{4}{5}\right)^2=1-\frac{16}{25}=\frac{9}{25}$

θ の動径が第 4 象限にあるから　$\sin\theta<0$

よって　$\sin\theta=-\sqrt{\frac{9}{25}}=-\frac{3}{5}$

また　$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\sin\theta\div\cos\theta$

$=\left(-\frac{3}{5}\right)\div\frac{4}{5}=-\frac{3}{4}$

● (1)　θ の動径が第 4 象限にあり，$\cos\theta=\frac{2}{3}$ のとき，$\sin\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めなさい。

$\cos\theta=\frac{2}{3}$ を $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ に代入すると　$\sin^2\theta+\left(\frac{2}{3}\right)^2=1$

よって　$\sin^2\theta=1-\left(\frac{2}{3}\right)^2=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$

θ の動径が第 4 象限にあるから　$\sin\theta<0$

よって　$\sin\theta=-\frac{\sqrt{5}}{3}$

また　$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\sin\theta\div\cos\theta$

$=\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\div\frac{2}{3}=-\frac{\sqrt{5}}{2}$

(2)　θ の動径が第３象限にあり，$\sin\theta=-\frac{3}{5}$ のとき，$\cos\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めなさい。

$\sin\theta=-\frac{3}{5}$ を $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ に代入すると　$\left(-\frac{3}{5}\right)^2+\cos^2\theta=1$

よって　$\cos^2\theta=1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}$

θ の動径が第３象限にあるから　$\cos\theta<0$

よって　$\cos\theta=-\frac{4}{5}$

また　$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\sin\theta\div\cos\theta$

$=\left(-\frac{3}{5}\right)\div\left(-\frac{4}{5}\right)=\frac{3}{4}$

5　● $\tan\theta=-3$，$\cos\theta>0$ とする。次の問いに答えなさい。

(1)　θ の動径は第何象限にありますか。

$\tan\theta=-3$ であるから，θ の動径は，第２象限または第４象限にある。
$\cos\theta>0$ であるから，θ の動径は，第１象限または第４象限にある。
よって，θ の動径は，第４象限にある。

(2)　$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ を利用して，$\sin\theta$ を $\cos\theta$ で表しなさい。

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta=-3$ であるから　$\sin\theta=-3\cos\theta$

(3)　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ を利用して，$\cos\theta$ の値を求めなさい。

$\sin\theta=-3\cos\theta$ を $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ に代入すると

$(-3\cos\theta)^2+\cos^2\theta=1$

$9\cos^2\theta+\cos^2\theta=1$

$10\cos^2\theta=1$

$\cos^2\theta=\frac{1}{10}$

$\cos\theta>0$ であるから　$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{10}}$

(4)　$\sin\theta$ の値を求めなさい。

$\sin\theta=-3\cos\theta=-3\times\frac{1}{\sqrt{10}}=-\frac{3}{\sqrt{10}}$

6　例　α の動径が第４象限にあり，$\cos\alpha=\frac{3}{5}$ のとき，$\sin2\alpha$ の値を求めなさい。

$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{16}{25}$

α の動径が第４象限にあるから　$\sin\alpha<0$

よって　$\sin\alpha=-\sqrt{\frac{16}{25}}=-\frac{4}{5}$

したがって　$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\times\left(-\frac{4}{5}\right)\times\frac{3}{5}=-\frac{24}{25}$

● α の動径が第２象限にあり，$\sin\alpha=\frac{4}{5}$ のとき，次の値を求めなさい。

(1)　$\sin2\alpha$

$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$

α の動径が第２象限にあるから

$\cos\alpha<0$

よって　$\cos\alpha=-\sqrt{\frac{9}{25}}=-\frac{3}{5}$

したがって

$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

$=2\times\frac{4}{5}\times\left(-\frac{3}{5}\right)$

$=-\frac{24}{25}$

(2)　$\cos2\alpha$

$\cos2\alpha=1-2\sin^2\alpha=1-2\times\left(\frac{4}{5}\right)^2$

$=-\frac{7}{25}$

● α の動径が第３象限にあり，$\cos\alpha=-\frac{2}{\sqrt{5}}$ のとき，次の値を求めなさい。

(1)　$\sin2\alpha$

$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2=\frac{1}{5}$

α の動径が第３象限にあるから

$\sin\alpha<0$

よって　$\sin\alpha=-\sqrt{\frac{1}{5}}=-\frac{1}{\sqrt{5}}$

したがって

$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

$=2\times\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\times\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

$=\frac{4}{5}$

(2)　$\cos2\alpha$

$\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

$=2\times\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2-1=\frac{3}{5}$

7　● α，β の動径はともに第２象限にあるものとする。

$\sin\alpha=\frac{4}{5}$，$\cos\beta=-\frac{2}{5}$ のとき，次の値を求めなさい。

(1)　$\cos\alpha$

$\sin\alpha=\frac{4}{5}$ を $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ に代入すると

$\left(\frac{4}{5}\right)^2+\cos^2\alpha=1$

よって　$\cos^2\alpha=1-\left(\frac{4}{5}\right)^2$

$=1-\frac{16}{25}=\frac{9}{25}$

α の動径は第２象限にあるから

$\cos\alpha<0$

よって　$\cos\alpha=-\sqrt{\frac{9}{25}}=-\frac{3}{5}$

(2)　$\sin\beta$

$\cos\beta=-\frac{2}{5}$ を $\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$ に代入すると

$\sin^2\beta+\left(-\frac{2}{5}\right)^2=1$

よって　$\sin^2\beta=1-\left(-\frac{2}{5}\right)^2$

$=1-\frac{4}{25}=\frac{21}{25}$

β の動径は第２象限にあるから

$\sin\beta>0$

よって　$\sin\beta=\sqrt{\frac{21}{25}}=\frac{\sqrt{21}}{5}$

(3)　$\sin(\alpha+\beta)$

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$=\frac{4}{5}\times\left(-\frac{2}{5}\right)+\left(-\frac{3}{5}\right)\times\frac{\sqrt{21}}{5}$

$=\frac{-8-3\sqrt{21}}{25}$

(4)　$\cos(\alpha-\beta)$

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$=-\frac{3}{5}\times\left(-\frac{2}{5}\right)+\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{21}}{5}$

$=\frac{6+4\sqrt{21}}{25}$

8　● $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1)　$\cos2\theta+3\cos\theta-1=0$

方程式を変形すると　$(2\cos^2\theta-1)+3\cos\theta-1=0$

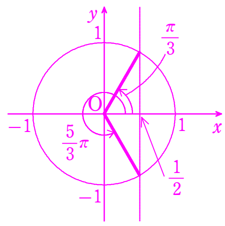
整理して　$2\cos^2\theta+3\cos\theta-2=0$

よって　$(\cos\theta+2)(2\cos\theta-1)=0$

$\cos\theta+2\fallingdotseq0$ であるから　$2\cos\theta-1=0$

すなわち　$\cos\theta=\frac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$\theta=\frac{\pi}{3}$，$\frac{5}{3}\pi$



(2)　$\sin2\theta-\sin\theta=0$

方程式を変形すると　$2\sin\theta\cos\theta-\sin\theta=0$

よって　$\sin\theta(2\cos\theta-1)=0$

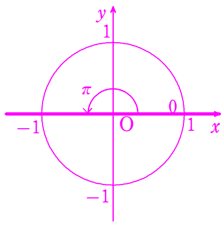
ゆえに　$\sin\theta=0$　または　$\cos\theta=\frac{1}{2}$

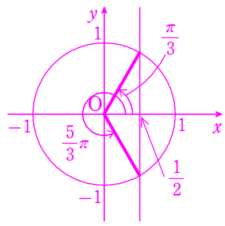
$0\leqq\theta<2\pi$ であるから

$\sin\theta=0$ より　$\theta=0$，π

$\cos\theta=\frac{1}{2}$ より　$\theta=\frac{\pi}{3}$，$\frac{5}{3}\pi$

よって，解は　$\theta=0$，$\frac{\pi}{3}$，π，$\frac{5}{3}\pi$





(3)　$\cos2\theta-\sqrt{3}\sin\theta+2=0$

方程式を変形すると　$(1-2\sin^2\theta)-\sqrt{3}\sin\theta+2=0$

整理して　$2\sin^2\theta+\sqrt{3}\sin\theta-3=0$

よって　$(\sin\theta+\sqrt{3})(2\sin\theta-\sqrt{3})=0$

$\sin\theta+\sqrt{3}\fallingdotseq0$ であるから　$2\sin\theta-\sqrt{3}=0$

すなわち　$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$\theta=\frac{\pi}{3}$，$\frac{2}{3}\pi$