1 例　関数 $f(x)=x^3$ の導関数を求めなさい。

解答　$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ において

$$f(x+h)-f(x)=(x+h)^3-x^3=(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3)-x^3=3x^2h+3xh^2+h^3=h(3x^2+3xh+h^2)$$

よって　$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(3x^2+3xh+h^2)}{h}=\lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2)=3x^2$

例　関数 $f(x)=3x^2$ の導関数を求めます。

$$f(x+h)-f(x)=3(x+h)^2-3x^2=3\{(x^2+2xh+h^2)-x^2\}=3(2xh+h^2)=3h(2x+h)$$

よって　$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{3h(2x+h)}{h}=\lim_{h\to 0}3(2x+h)=3\times 2x=6x$

例　関数 $f(x)=x^2+x$ の導関数を求めます。

$$f(x+h)-f(x)=\{(x+h)^2+(x+h)\}-(x^2+x)=\{(x+h)^2-x^2\}+\{(x+h)-x\}=(x^2+2xh+h^2-x^2)+h=2xh+h^2+h=h(2x+h+1)$$

よって　$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h+1)}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h+1)=2x+1$

●関数 $f(x)=x$ の導関数を求めなさい。

$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ において

$f(x+h)-f(x)=(x+h)-x=h$

よって　$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=\lim_{h\to 0}1=1$

したがって　$f'(x)=1$

2 例　次の関数を微分しなさい。

(1)　$y=x^3-3x^2+1$　　(2)　$y=x(x+5)$

解答　(1)　$y'=(x^3-3x^2+1)'=(x^3)'-3(x^2)'+(1)'=3x^2-3\times 2x+0=3x^2-6x$

(2)　右辺を展開すると　$y=x^2+5x$

よって　$y'=(x^2+5x)'=(x^2)'+5(x)'=2x+5\times 1=2x+5$

●次の関数を微分しなさい。

(1)　$y=4x^2$

$y'=(4x^2)'=4(x^2)'=4\times 2x=8x$

(2)　$y=-2x^3$

$y'=(-2x^3)'=-2(x^3)'=-2\times 3x^2=-6x^2$

(3)　$y=x^2-x$

$y'=(x^2-x)'=(x^2)'-(x)'=2x-1$

(4)　$y=x^3-2$

$y'=(x^3-2)'=(x^3)'-(2)'=3x^2$

(5)　$y=x^2+2x+3$

$y'=(x^2+2x+3)'=(x^2)'+2(x)'+(3)'=2x+2\times 1=2x+2$

(6)　$y=-5x^3-3x+6$

$y'=(-5x^3-3x+6)'=-5(x^3)'-3(x)'+(6)'=-5\times 3x^2-3\times 1=-15x^2-3$

(7)　$y=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2$

$y'=\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right)'=\frac{1}{3}(x^3)'+\frac{1}{2}(x^2)'=\frac{1}{3}\times 3x^2+\frac{1}{2}\times 2x=x^2+x$

(8)　$y=-x^3+\frac{3}{2}x^2+x$

$y'=\left(-x^3+\frac{3}{2}x^2+x\right)'=-(x^3)'+\frac{3}{2}(x^2)'+(x)'=-3x^2+\frac{3}{2}\times 2x+1=-3x^2+3x+1$

(9)　$y=x(x^2-1)$

右辺を展開すると　$y=x^3-x$

よって　$y'=(x^3-x)'=(x^3)'-(x)'=3x^2-1$

(10)　$y=(x+3)^2$

右辺を展開すると　$y=x^2+6x+9$

よって　$y'=(x^2+6x+9)'=(x^2)'+6(x)'+(9)'=2x+6\times 1=2x+6$

3 ●次の関数を微分せよ。

(1)　$y=-3$

$y'=0$

(2)　$y=4x+3$

$y'=4$

(3)　$y=-3x^2+7x+5$

$y'=-3\cdot 2x+7=-6x+7$

(4)　$y=x^3-5x^2+2x+1$

$y'=3x^2-5\cdot 2x+2=3x^2-10x+2$

(5)　$y=(x+1)(5x+1)$

$y=(x+1)(5x+1)=5x^2+6x+1$

よって　$y'=5\cdot 2x+6=10x+6$

(6)　$y=(x+2)(x-1)$

$y=(x+2)(x-1)=x^2+x-2$

よって　$y'=2x+1$

(7)　$y=(2x-1)^2$

$y=(2x-1)^2=4x^2-4x+1$

よって　$y'=4\cdot 2x-4=8x-4$

(8)　$y=x(x-4)^2$

$y=x(x-4)^2=x(x^2-8x+16)=x^3-8x^2+16x$

よって　$y'=3x^2-8\cdot 2x+16=3x^2-16x+16$

4 ●次の関数について，与えられた微分係数を求めよ。

(1)　$f(x)=3x^2-2x+4$，$f'(0)$

$f'(x)=6x-2$

よって　$f'(0)=6\cdot 0-2=-2$

(2)　$f(x)=x^3+4x+3$，$f'(1)$

$f'(x)=3x^2+4$

よって　$f'(1)=3\cdot 1^2+4=7$

(3)　$f(x)=5x-1$，$f'(3)$

$f'(x)=5$

よって　$f'(3)=5$

(4)　$f(x)=4$，$f'(-5)$

$f'(x)=0$

よって　$f'(-5)=0$

(5)　$f(x)=-2x^3-5x^2-x+7$，$f'(-2)$

$f'(x)=-6x^2-10x-1$

よって

$f'(-2)=-6\cdot(-2)^2-10\cdot(-2)-1=-5$

(6)　$f(x)=(x-2)(3x+5)$，$f'(0)$

$f(x)=(x-2)(3x+5)=3x^2-x-10$

よって　$f'(x)=6x-1$

ゆえに　$f'(0)=6\cdot 0-1=-1$

(7)　$f(x)=(x-2)(x+2)$，$f'(-6)$

$f(x)=(x-2)(x+2)=x^2-4$

よって　$f'(x)=2x$

ゆえに　$f'(-6)=2\cdot(-6)=-12$

(8)　$f(x)=(2x-3)^2$，$f'(4)$

$f(x)=(2x-3)^2=4x^2-12x+9$

よって　$f'(x)=8x-12$

ゆえに　$f'(4)=8\cdot 4-12=20$

5 ●次の関数を微分せよ。

(1) $y=(x^2+4)(2x-1)$

$y'=(x^2+4)'(2x-1)+(x^2+4)(2x-1)'$
$=2x(2x-1)+(x^2+4)\cdot 2$
$=6x^2-2x+8$

(2) $y=(3x^2+1)(x^2+5x+2)$

$y'=(3x^2+1)'(x^2+5x+2)+(3x^2+1)(x^2+5x+2)'$
$=6x(x^2+5x+2)+(3x^2+1)(2x+5)$
$=12x^3+45x^2+14x+5$

(3) $y=(x^3+4x)(x^2-5)$

$y'=(x^3+4x)'(x^2-5)+(x^3+4x)(x^2-5)'$
$=(3x^2+4)(x^2-5)+(x^3+4x)\cdot 2x$
$=5x^4-3x^2-20$

(4) $y=(x+1)(x^4+2x^3-3x^2+x-4)$

$y'=(x+1)'(x^4+2x^3-3x^2+x-4)+(x+1)(x^4+2x^3-3x^2+x-4)'$
$=1\cdot(x^4+2x^3-3x^2+x-4)+(x+1)(4x^3+6x^2-6x+1)$
$=5x^4+12x^3-3x^2-4x-3$

(5) $y=(x^2-x)(x^4-7x+4)$

$y'=(x^2-x)'(x^4-7x+4)+(x^2-x)(x^4-7x+4)'$
$=(2x-1)(x^4-7x+4)+(x^2-x)(4x^3-7)$
$=6x^5-5x^4-21x^2+22x-4$

6 ●次の関数を微分せよ。

(1) $y=(3x+2)(x^2-3)$

$y'=(3x+2)'(x^2-3)+(3x+2)(x^2-3)'$
$=3\cdot(x^2-3)+(3x+2)\cdot 2x$
$=9x^2+4x-9$

(2) $y=(2x^2-1)(x^2-3x+4)$

$y'=(2x^2-1)'(x^2-3x+4)+(2x^2-1)(x^2-3x+4)'$
$=4x(x^2-3x+4)+(2x^2-1)(2x-3)$
$=8x^3-18x^2+14x+3$

(3) $y=(x^3-x)(x^2+4)$

$y'=(x^3-x)'(x^2+4)+(x^3-x)(x^2+4)'$
$=(3x^2-1)(x^2+4)+(x^3-x)\cdot 2x$
$=5x^4+9x^2-4$

(4) $y=(2x-1)(x^4+5x^2-3)$

$y'=(2x-1)'(x^4+5x^2-3)+(2x-1)(x^4+5x^2-3)'$
$=2\cdot(x^4+5x^2-3)+(2x-1)(4x^3+10x)$
$=10x^4-4x^3+30x^2-10x-6$

(5) $y=(x^2+x)(x^4-3x+1)$

$y'=(x^2+x)'(x^4-3x+1)+(x^2+x)(x^4-3x+1)'$
$=(2x+1)(x^4-3x+1)+(x^2+x)(4x^3-3)$
$=6x^5+5x^4-9x^2-4x+1$

7 ●次の関数を微分せよ。

(1) $y=\dfrac{2}{x^2+3}$

$y'=-\dfrac{2(x^2+3)'}{(x^2+3)^2}=-\dfrac{4x}{(x^2+3)^2}$

(2) $y=\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{2}{x^2-5}$

$y'=-\dfrac{(x+2)'}{(x+2)^2}-\dfrac{2(x^2-5)'}{(x^2-5)^2}=-\dfrac{1}{(x+2)^2}-\dfrac{4x}{(x^2-5)^2}$

(3) $y=\dfrac{x-1}{x^2+2x-5}$

$y'=\dfrac{(x-1)'(x^2+2x-5)-(x-1)(x^2+2x-5)'}{(x^2+2x-5)^2}$
$=\dfrac{1\cdot(x^2+2x-5)-(x-1)(2x+2)}{(x^2+2x-5)^2}$
$=\dfrac{-x^2+2x-3}{(x^2+2x-5)^2}$

(4) $y=\dfrac{x^2+1}{x^3+1}$

$y'=\dfrac{(x^2+1)'(x^3+1)-(x^2+1)(x^3+1)'}{(x^3+1)^2}$
$=\dfrac{2x(x^3+1)-(x^2+1)\cdot 3x^2}{(x^3+1)^2}$
$=\dfrac{-x^4-3x^2+2x}{(x^3+1)^2}$

(5) $y=\dfrac{x}{x^4-8x^2+15}$

$y'=\dfrac{(x)'(x^4-8x^2+15)-x(x^4-8x^2+15)'}{(x^4-8x^2+15)^2}$
$=\dfrac{1\cdot(x^4-8x^2+15)-x(4x^3-16x)}{(x^4-8x^2+15)^2}$
$=\dfrac{-3x^4+8x^2+15}{(x^4-8x^2+15)^2}$

8 ●次の関数を微分せよ。

(1) $y=-\dfrac{1}{x^3+x}$

$y'=-\left\{-\dfrac{(x^3+x)'}{(x^3+x)^2}\right\}=\dfrac{3x^2+1}{(x^3+x)^2}$

(2) $y=\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{3}{x^2-4}$

$y'=-\dfrac{(x-3)'}{(x-3)^2}-\left\{-\dfrac{3(x^2-4)'}{(x^2-4)^2}\right\}=-\dfrac{1}{(x-3)^2}+\dfrac{6x}{(x^2-4)^2}$

(3) $y=\dfrac{x}{x^2-x+1}$

$y'=\dfrac{(x)'(x^2-x+1)-x(x^2-x+1)'}{(x^2-x+1)^2}$
$=\dfrac{1\cdot(x^2-x+1)-x(2x-1)}{(x^2-x+1)^2}$
$=\dfrac{-x^2+1}{(x^2-x+1)^2}$

(4) $y=\dfrac{2x^2+x}{x^2-2}$

$y'=\dfrac{(2x^2+x)'(x^2-2)-(2x^2+x)(x^2-2)'}{(x^2-2)^2}$
$=\dfrac{(4x+1)(x^2-2)-(2x^2+x)\cdot 2x}{(x^2-2)^2}$
$=\dfrac{-x^2-8x-2}{(x^2-2)^2}$

(5) $y=\dfrac{x^2}{4x^2-4x+3}$

$y'=\dfrac{(x^2)'(4x^2-4x+3)-x^2(4x^2-4x+3)'}{(4x^2-4x+3)^2}$
$=\dfrac{2x(4x^2-4x+3)-x^2(8x-4)}{(4x^2-4x+3)^2}$
$=\dfrac{-4x^2+6x}{(4x^2-4x+3)^2}$