数学補習授業７回目（その２：解説）　　学籍番号（　　　　）　名前（　　　　）

1 例　関数 $f(x)=2x^2$ の $x=-1$ における微分係数を求めよ。

$$f'(-1)=\lim_{h\to0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{2(-1+h)^2-2(-1)^2}{h}=\lim_{h\to0}\frac{-4h+2h^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}(-4+2h)=-4$$

●次のものを求めよ。

(1)　関数 $f(x)=x^2$ の $x=-3$ における微分係数

$$f'(-3)=\lim_{h\to0}\frac{f(-3+h)-f(-3)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{(-3+h)^2-(-3)^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{-6h+h^2}{h}=\lim_{h\to0}(-6+h)=-6$$

(2)　関数 $f(x)=5x^2$ の $x=2$ における微分係数

$$f'(2)=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{5(2+h)^2-5\cdot2^2}{h}=\lim_{h\to0}\frac{20h+5h^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}(20+5h)=20$$

2 例　関数 $f(x)=5x^2$ について，次のものを求めよ。

(1)　導関数 $f'(x)$

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{5(x+h)^2-5x^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{10xh+5h^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}(10x+5h)=10x$$

(2)　微分係数 $f'(1)$，$f'(-2)$

$$f'(1)=10\cdot1=10$$
$$f'(-2)=10\cdot(-2)=-20$$

●関数 $f(x)=2x^2$ について，次のものを求めよ。

(1)　導関数 $f'(x)$

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{2(x+h)^2-2x^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{4xh+2h^2}{h}=\lim_{h\to0}(4x+2h)$$
$$=4x$$

(2)　微分係数 $f'(6)$，$f'(-1)$

$$f'(6)=4\cdot6=24$$
$$f'(-1)=4\cdot(-1)=-4$$

●関数 $f(x)=-3x^2$ について，次のものを求めよ。

(2)　導関数 $f'(x)$

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{-3(x+h)^2-(-3x^2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{-6xh-3h^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}(-6x-3h)=-6x$$

(2)　微分係数 $f'(0)$，$f'(-5)$

$$f'(0)=-6\cdot0=0$$
$$f'(-5)=-6\cdot(-5)=30$$

3 例　関数 $y=2x^3-3x^2+5$ を微分せよ。

$$y'=2(x^3)'-3(x^2)'+(5)'=2\cdot3x^2-3\cdot2x+0=6x^2-6x$$

●次の関数を微分せよ。

(1)　$y=5x^3$

$y'=5(x^3)'=5\cdot3x^2=15x^2$

(2)　$y=-3$

$y'=(-3)'=0$

(3)　$y=x^2+4x+6$

$y'=(x^2)'+4(x)'+(6)'=2x+4\cdot1+0$
$=2x+4$

(4)　$y=5x^3-4x^2+3x$

$y'=5(x^3)'-4(x^2)'+3(x)'$
$=5\cdot3x^2-4\cdot2x+3\cdot1=15x^2-8x+3$

(5)　$y=x^3+3x^2-2x-4$

$y'=(x^3)'+3(x^2)'-2(x)'-(4)'$
$=3x^2+3\cdot2x-2\cdot1-0=3x^2+6x-2$

(6)　$y=\frac{5}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+4$

$y'=\frac{5}{3}(x^3)'+\frac{1}{2}(x^2)'+(4)'$
$=\frac{5}{3}\cdot3x^2+\frac{1}{2}\cdot2x+0=5x^2+x$

●次の関数を微分せよ。

(1)　$y=-2x$

$y'=-2(x)'=-2\cdot1=-2$

(2)　$y=0$

$y'=(0)'=0$

(3)　$y=x^2-3x-5$

$y'=(x^2)'-3(x)'-(5)'=2x-3\cdot1-0$
$=2x-3$

(4)　$y=3x^3+4x-7$

$y'=3(x^3)'+4(x)'-(7)'=3\cdot3x^2+4\cdot1-0$
$=9x^2+4$

(5)　$y=-x^3-5x^2+6x+1$

$y'=-(x^3)'-5(x^2)'+6(x)'+(1)'$
$=-3x^2-5\cdot2x+6\cdot1+0$
$=-3x^2-10x+6$

(6)　$y=-\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2-6$

$y'=-\frac{2}{3}(x^3)'-\frac{5}{2}(x^2)'-(6)'$
$=-\frac{2}{3}\cdot3x^2-\frac{5}{2}\cdot2x-0=-2x^2-5x$

4 ●次の関数を微分せよ。

(1)　$y=x^5$

$y'=5x^4$

(2)　$y=-2x^4$

$y'=-2\cdot4x^3=-8x^3$

(3)　$y=x^3-3x^2$

$y'=3x^2-3\cdot2x$
$=3x^2-6x$

(4)　$y=4x^3+5x^2+7x+1$

$y'=4\cdot3x^2+5\cdot2x+7$
$=12x^2+10x+7$

(5)　$y=x^{-2}$

$y'=-2x^{-2-1}=-2x^{-3}\left(=-\frac{2}{x^3}\right)$

(6)　$y=-3x^{-3}$

$y'=-3(-3x^{-3-1})=9x^{-4}\left(=\frac{9}{x^4}\right)$

(7)　$y=\frac{1}{x^4}$

$\frac{1}{x^4}=x^{-4}$ であるから

$y'=-4x^{-4-1}=-4x^{-5}=-\frac{4}{x^5}$

(8)　$y=x^2+\frac{1}{x^5}$

$x^2+\frac{1}{x^5}=x^2+x^{-5}$ であるから

$y'=2x-5x^{-5-1}$
$=2x-5x^{-6}=2x-\frac{5}{x^6}$

5 ●次の関数を微分せよ。

(1)　$y=(x^2+1)(x+2)$

$y'=(x^2+1)'(x+2)+(x^2+1)(x+2)'$
$=2x(x+2)+(x^2+1)\cdot1$
$=2x^2+4x+x^2+1$
$=3x^2+4x+1$

(2)　$y=(2x^2-1)(x^2-x+3)$

$y'=(2x^2-1)'(x^2-x+3)$
$+(2x^2-1)(x^2-x+3)'$
$=4x(x^2-x+3)+(2x^2-1)(2x-1)$
$=8x^3-6x^2+10x+1$

(3)　$y=(x^3+x)(x-2)$

$y'=(x^3+x)'(x-2)+(x^3+x)(x-2)'$
$=(3x^2+1)(x-2)+(x^3+x)\cdot1$
$=3x^3-6x^2+x-2+x^3+x$
$=4x^3-6x^2+2x-2$

(4)　$y=(x+1)(x^3+2x^2-3x-4)$

$y'=(x+1)'(x^3+2x^2-3x-4)$
$+(x+1)(x^3+2x^2-3x-4)'$
$=1\cdot(x^3+2x^2-3x-4)$
$+(x+1)(3x^2+4x-3)$
$=x^3+2x^2-3x-4+3x^3+4x^2$
$-3x+3x^2+4x-3$
$=4x^3+9x^2-2x-7$

(5)　$y=(x^2+3)(x^3-4x)$

$y'=(x^2+3)'(x^3-4x)+(x^2+3)(x^3-4x)'$
$=2x(x^3-4x)+(x^2+3)(3x^2-4)$
$=2x^4-8x^2+3x^4+5x^2-12$
$=5x^4-3x^2-12$

(6)　$y=(x^2-x)(x^4+5x)$

$y'=(x^2-x)'(x^4+5x)+(x^2-x)(x^4+5x)'$
$=(2x-1)(x^4+5x)+(x^2-x)(4x^3+5)$
$=2x^5+10x^2-x^4-5x$
$+4x^5+5x^2-4x^4-5x$
$=6x^5-5x^4+15x^2-10x$

6 ●次の関数を微分せよ。

(1) $y=\dfrac{1}{x^2+2}$

$y'=-\dfrac{(x^2+2)'}{(x^2+2)^2}=-\dfrac{2x}{(x^2+2)^2}$

(2) $y=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x^2+3}$

$y'=-\dfrac{(x+1)'}{(x+1)^2}-\dfrac{2(x^2+3)'}{(x^2+3)^2}$

$=-\dfrac{1}{(x+1)^2}-\dfrac{4x}{(x^2+3)^2}$

(3) $y=\dfrac{2x-3}{x^2+1}$

$y'=\dfrac{(2x-3)'(x^2+1)-(2x-3)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$

$=\dfrac{2(x^2+1)-(2x-3)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$

$=\dfrac{-2x^2+6x+2}{(x^2+1)^2}$

(4) $y=\dfrac{x-1}{x^2+2x}$

$y'=\dfrac{(x-1)'(x^2+2x)-(x-1)(x^2+2x)'}{(x^2+2x)^2}$

$=\dfrac{1\cdot(x^2+2x)-(x-1)(2x+2)}{(x^2+2x)^2}$

$=\dfrac{-x^2+2x+2}{(x^2+2x)^2}$

(5) $y=\dfrac{x^2}{x^2+x-1}$

$y'=\dfrac{(x^2)'(x^2+x-1)-x^2(x^2+x-1)'}{(x^2+x-1)^2}$

$=\dfrac{2x(x^2+x-1)-x^2(2x+1)}{(x^2+x-1)^2}$

$=\dfrac{x^2-2x}{(x^2+x-1)^2}$

(6) $y=\dfrac{x^2+1}{x^3+1}$

$y'=\dfrac{(x^2+1)'(x^3+1)-(x^2+1)(x^3+1)'}{(x^3+1)^2}$

$=\dfrac{2x(x^3+1)-(x^2+1)\cdot 3x^2}{(x^3+1)^2}$

$=\dfrac{-x^4-3x^2+2x}{(x^3+1)^2}$

7 ●次の関数を微分せよ。

(1) $y=x^4$

$y'=4x^{4-1}$

$=4x^3$

(2) $y=2x^3$

$y'=2\cdot 3x^{3-1}$

$=6x^2$

(3) $y=-3x^2$

$y'=(-3)\cdot 2x^{2-1}$

$=-6x$

(4) $y=-5x^6$

$y'=(-5)\cdot 6x^{6-1}$

$=-30x^5$

(5) $y=x^3-2x^2$

$y'=3x^{3-1}-2\cdot 2x^{2-1}$

$=3x^2-4x$

(6) $y=x^4+3x^2+4$

$y'=4x^{4-1}+3\cdot 2x^{2-1}$

$=4x^3+6x$

(7) $y=x^{-4}$

$y'=-4x^{-4-1}$

$=-4x^{-5}$

(8) $y=\dfrac{1}{x^5}$

$\dfrac{1}{x^5}=x^{-5}$ であるから

$y'=-5x^{-5-1}$

$=-5x^{-6}$

$=-\dfrac{5}{x^6}$

8 ●次の関数を微分せよ。

(1) $y=(x+2)(3x+4)$

$y'=(x+2)'(3x+4)+(x+2)(3x+4)'$

$=1\cdot(3x+4)+(x+2)\cdot 3$

$=3x+4+3x+6$

$=6x+10$

(2) $y=(2x+3)(x^2-3)$

$y'=(2x+3)'(x^2-3)+(2x+3)(x^2-3)'$

$=2\cdot(x^2-3)+(2x+3)\cdot 2x$

$=2x^2-6+4x^2+6x$

$=6x^2+6x-6$

(3) $y=x^2(x^2-2x)$

$y'=(x^2)'(x^2-2x)+x^2(x^2-2x)'$

$=2x(x^2-2x)+x^2(2x-2)$

$=2x^3-4x^2+2x^3-2x^2$

$=4x^3-6x^2$

(4) $y=(x^3-2x)x^4$

$y'=(x^3-2x)'x^4+(x^3-2x)(x^4)'$

$=(3x^2-2)x^4+(x^3-2x)\cdot 4x^3$

$=3x^6-2x^4+4x^6-8x^4$

$=7x^6-10x^4$

(5) $y=(x^2+2x)(2x^3-x)$

$y'=(x^2+2x)'(2x^3-x)+(x^2+2x)(2x^3-x)'$

$=(2x+2)(2x^3-x)+(x^2+2x)(6x^2-1)$

$=4x^4-2x^2+4x^3-2x+6x^4-x^2$

$+12x^3-2x$

$=10x^4+16x^3-3x^2-4x$

(6) $y=(3x^2-1)(2x^2+x)$

$y'=(3x^2-1)'(2x^2+x)+(3x^2-1)(2x^2+x)'$

$=6x(2x^2+x)+(3x^2-1)(4x+1)$

$=12x^3+6x^2+12x^3+3x^2-4x-1$

$=24x^3+9x^2-4x-1$

9 ●次の関数を微分せよ。

(1) $y=\dfrac{1}{x+2}$

$y'=-\dfrac{(x+2)'}{(x+2)^2}$

$=-\dfrac{1}{(x+2)^2}$

(2) $y=\dfrac{1}{x^2-4}$

$y'=-\dfrac{(x^2-4)'}{(x^2-4)^2}$

$=-\dfrac{2x}{(x^2-4)^2}$

(3) $y=\dfrac{2x+3}{x^2+1}$

$y'=\dfrac{(2x+3)'(x^2+1)-(2x+3)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$

$=\dfrac{2(x^2+1)-(2x+3)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$

$=\dfrac{2x^2+2-4x^2-6x}{(x^2+1)^2}$

$=\dfrac{-2x^2-6x+2}{(x^2+1)^2}$

$=-\dfrac{2(x^2+3x-1)}{(x^2+1)^2}$

(4) $y=\dfrac{3x^2-1}{4x+5}$

$y'=\dfrac{(3x^2-1)'(4x+5)-(3x^2-1)(4x+5)'}{(4x+5)^2}$

$=\dfrac{6x(4x+5)-(3x^2-1)\cdot 4}{(4x+5)^2}$

$=\dfrac{24x^2+30x-12x^2+4}{(4x+5)^2}$

$=\dfrac{12x^2+30x+4}{(4x+5)^2}$

$=\dfrac{2(6x^2+15x+2)}{(4x+5)^2}$