数学補習：講義プリント 10 回目

♣ 導関数の応用：その 1

接線の方程式　曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における接線の方程式は

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

例.　曲線 $y = x^2 - 4x + 1$ 上の点 $(3,\ -2)$ における接線の方程式を求めよ。

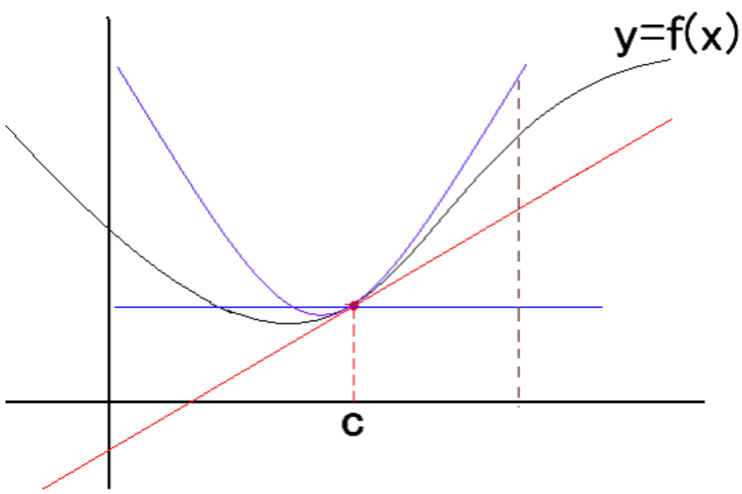
[解答]　$f(x) = x^2 - 4x + 1$ とおくと，　$f'(x) = 2x - 4$ より，$f'(3) = 2 \cdot 3 - 4 = 2.$
したがって，求めたい接線の方程式は

$$\begin{aligned} y - f(3) &= f'(3)(x - 3) \\ y - (-2) &= 2(x - 3) \\ y + 2 &= 2x - 6 \\ y &= 2x - 8 \qquad \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

Remark：テイラーの定理の幾何学的意味

関数 $y = f(x)$ を多項式関数で近似する。近似多項式と関数 $y = f(x)$ の誤差を表すのがラグランジュの剰余項である。

$$\begin{aligned} f(x) &= f(c) + R_1 \\ f(x) &= f(c) + f'(c)(x-c) + R_2 \\ f(x) &= f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + R_3 \\ f(x) &= f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \frac{f^{(3)}(c)}{3!}(x-c)^3 + R_4 \\ &\vdots \end{aligned}$$



問 1　与えられた点における，次の曲線の接線の方程式を求めよ．

(1)　$y = x^4 - x^2$　　点 $(1, 0)$

(2)　$y = 3\sqrt{x}$　　点 $(1, 3)$

(3)　$y = \dfrac{3}{x+1}$　　点 $(2, 1)$

(4)　$y = \sin 2x$　　点 $\left(\dfrac{\pi}{12}, \dfrac{1}{2}\right)$

♣ 導関数の応用：その２（関数の極大・極小）

定理 7.1　関数 $f(x)$ は区間 $[a,b]$ で連続で，区間 (a,b) で微分可能とする。このとき

$f(x)$ が $[a,b]$ で単調増加（単調減少）　$\Longleftrightarrow$　(a,b) において $f'(x) \geqq 0$　$(f'(x) \leqq 0)$

定義（極大・極小）　点 c を含む十分小さい開区間において，任意の $x \neq c$ に対し，

$$f(c) > f(x) \qquad (f(c) < f(x))$$

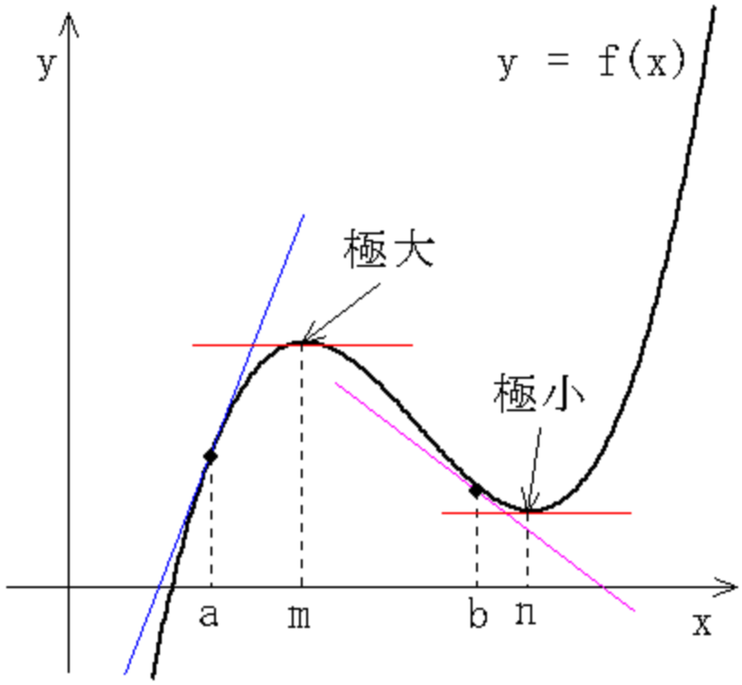
が成り立つならば，$f(x)$ は $x=c$ で**極大（極小）**であるといい，$f(c)$ を**極大値（極小値）**という。極大値と極小値を総称して，**極値**という。

極値をとるための必要条件　$f(x)$ が $x=c$ で極値をとるならば，　$f'(c)=0$

<u>Remark</u>　上記の対偶をとると

$f'(c)=0$ をみたさない点 c では，$f(x)$ は極値をとらない

極値の判定法　$f(x)$ が微分可能で $f'(c)=0$ であるとき，$x=c$ を境目として $f'(x)$ の符号を調べれば，極値を判定することができる。



例 関数 $f(x) = \dfrac{4x+3}{x^2+1}$ の極値を求めよ。

解). まず，$f'(x) = 0$ となる点をみつける。

$$f'(x) = \frac{4(x^2+1) - 2x(4x+3)}{(x^2+1)^2} = \frac{-2(x+2)(2x-1)}{(x^2+1)^2}.$$

そこで, $f'(x) = 0$ とすると，$x = -2,\ \dfrac{1}{2}$

よって，関数 $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	$x = \frac{1}{2}$	$\cdots$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\searrow$	極小 -1	$\nearrow$	極大 4	$\searrow$

従って，$f(x)$ は $x = -2$ で極小値 -1，$x = \dfrac{1}{2}$ で極大値 4 をとる。 $\square$

問 2 関数 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ の極値を求めよ.