

**指数の拡張**  $a > 0$  のとき、自然数  $n$ , 整数  $m$  に対し、

$$a^0 = 1, \quad \frac{1}{a^n} = a^{-n}, \quad a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}, \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

と定める。

**指数法則**  $a > 0, b > 0$  のとき、実数  $p, q$  に対し、次が成り立つ。

$$(1) a^p a^q = a^{p+q} \quad (2) \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q} \quad (3) (a^p)^q = a^{pq}$$

$$(4) (ab)^p = a^p b^p \quad (5) \left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$$

**注意.** 指数法則の (1) と (3) の違いに気をつけること！

例えば、 $a^3$  は  $a$  を 3 個かけたものであるから

$$(1) a^3 a^2 = a^3 \times a^2 = aaa \times aa = a^5 = a^{3+2}$$

$$(3) (a^3)^2 = a^3 \times a^3 = (aaa) \times (aaa) = a^6 = a^{3 \times 2}$$

となるので、指数法則の (1) と (3) では意味が異なる！

**例.** (1)  $16^2 = (2^4)^2 = 2^{4 \times 2} = 2^8$

(2)  $\sqrt[5]{32} = 32^{\frac{1}{5}} = (2^5)^{\frac{1}{5}} = 2^{5 \times \frac{1}{5}} = 2^1 = 2$

(3)  $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times 2^5 \div 2^2 = (2^{-1})^3 \times 2^5 \div 2^2 = 2^{-3} \times 2^5 \div 2^2 = 2^{-3+5-2} = 2^0 = 1$

(4)  $\sqrt[4]{6} \div \sqrt{6} \times \sqrt[4]{12}$

$$= (2 \times 3)^{\frac{1}{4}} \div (2 \times 3)^{\frac{1}{2}} \times (2^2 \times 3)^{\frac{1}{4}}$$

$$= (2 \times 3)^{\frac{1}{4}} \times (2 \times 3)^{-\frac{1}{2}} \times (2^2 \times 3)^{\frac{1}{4}}$$

$$= (2^{\frac{1}{4}} \times 3^{\frac{1}{4}}) \times (2^{-\frac{1}{2}} \times 3^{-\frac{1}{2}}) \times (2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{4}})$$

$$= 2^{\frac{1}{4}} \times 2^{-\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{4}} \times 3^{-\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{4}}$$

$$= 2^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}$$

$$= 2^{\frac{1}{4}} \times 3^0$$

$$= 2^{\frac{1}{4}} \times 1$$

$$= 2^{\frac{1}{4}} (= \sqrt[4]{2})$$

問1. 次の式を簡単にせよ.

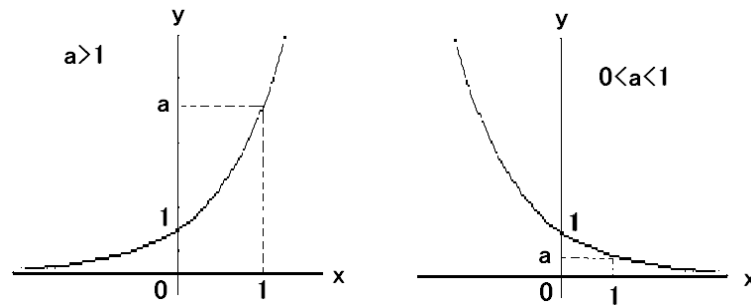
(1)  $27^{\frac{2}{3}}$       (2)  $8^{-\frac{1}{3}}$       (3)  $125^{\frac{2}{3}}$       (4)  $4^{\frac{1}{3}} \times 4^{\frac{1}{4}} \div 4^{\frac{1}{12}}$       (5)  $\sqrt[4]{9} \times \sqrt[6]{27}$

**ポイント** すべての数を素数の累乗の形にしてから計算するとよい。

**指数関数**  $a$  を 1 でない正の定数とすると、関数  $y = a^x$  を  $a$  を底とする指数関数という。

**指数関数  $y = a^x$  のグラフ**

- 定義域は  $-\infty < x < \infty$  (全実数)
- 値域は  $y > 0$
- グラフは連続で、点  $(0, 1)$  および点  $(1, a)$  を通る。
- グラフは  $x$  軸を漸近線とする。
- グラフは  $a > 1$  のとき単調に増加し、 $0 < a < 1$  のとき単調に減少する。



問2. 次の関数のグラフをかけ.

(1)  $y = 3^x$                       (2)  $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

問3. 次の関数のグラフをかけ.

(1)  $y = 2^x$

(2)  $y = -2^x$

(3)  $y = 2^{-x}$

(4)  $y = -2^{-x}$

問4. 次の数を小さい方から順に並べよ.

(1)  $\sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{9}, \sqrt[7]{27}$

(2)  $1, \frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$