

数学補習：講義プリント 12 回目

対数 $a > 0, a \neq 1$ のとき、正数 M に対して、 $a^m = M$ となる実数 m を a を底とする M の対数といい

$$m = \log_a M$$

と表す。従って、

$$m = \log_a M \iff a^m = M$$

である。 $a^0 = 1, a^1 = a$ であるから特に、

$$\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1$$

対数法則 $a > 0, a \neq 1, M > 0, N > 0$ に対し、次が成り立つ。

$$(1) \log_a MN = \log_a M + \log_a N$$

$$(2) \log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

$$(3) \log_a M^r = r \log_a M \quad (r \text{ は実数})$$

底の変換公式 $a > 0, b > 0, c > 0$ で $a \neq 1, c \neq 1$ のとき、次が成り立つ。

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

注意. 対数法則による式変形に気をつけること！

$$\textcircled{\circ} \log_5 2 \cdot 3 = \log_5 2 + \log_5 3 \quad (\text{注意: } \log_5(2+3) \neq \log_5 2 + \log_5 3 \text{ である!})$$

$$\textcircled{\circ} \log_5 2 \cdot 3 = \log_5 2 + \log_5 3 \quad (\text{注意: } \log_5 2 \cdot \log_5 3 \neq \log_5 2 + \log_5 3 \text{ である!})$$

$$\textcircled{\circ} \log_5 \frac{2}{3} = \log_5 2 - \log_5 3 \quad (\text{注意: } \frac{\log_5 2}{\log_5 3} \neq \log_5 2 - \log_5 3 \text{ である!})$$

$$\textcircled{\circ} \log_5 2^3 = 3 \log_5 2 \quad (\text{注意: } (\log_5 2)^3 \neq 3 \log_5 2 \text{ である!})$$

例. (1) $\log_3 \sqrt{27} = \log_3 \sqrt{3^3} = \log_3 3^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \log_3 3 = \frac{3}{2}$

(2) $\log_{12} 3 + \log_{12} 4 = \log_{12} 3 \cdot 4 = \log_{12} 12 = 1$

(3) $\log_3 10 - \log_3 2 = \log_3 \frac{10}{2} = \log_3 5$

(4) $2 \log_3 6 - \frac{\log_3 64}{3}$
 $= 2 \log_3 2 \cdot 3 - \frac{\log_3 2^6}{3}$
 $= 2(\log_3 2 + \log_3 3) - \frac{6 \log_3 2}{3}$
 $= 2 \log_3 2 + 2 \log_3 3 - 2 \log_3 2$
 $= 2$

問1. 次の式を簡単にせよ.

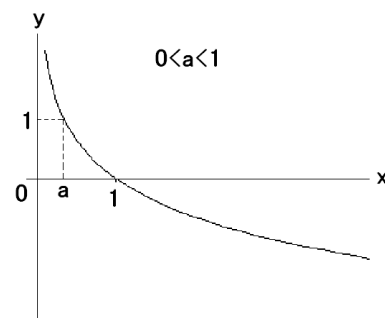
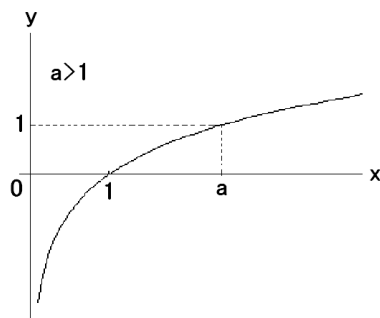
(1) $\log_2 32$ (2) $\log_{10} 10\sqrt{10}$ (3) $\log_6 12 + \log_6 3$ (4) $\log_3 7 - \log_3 63$

(5) $6 \log_2 \sqrt[3]{3} - \log_2 18$

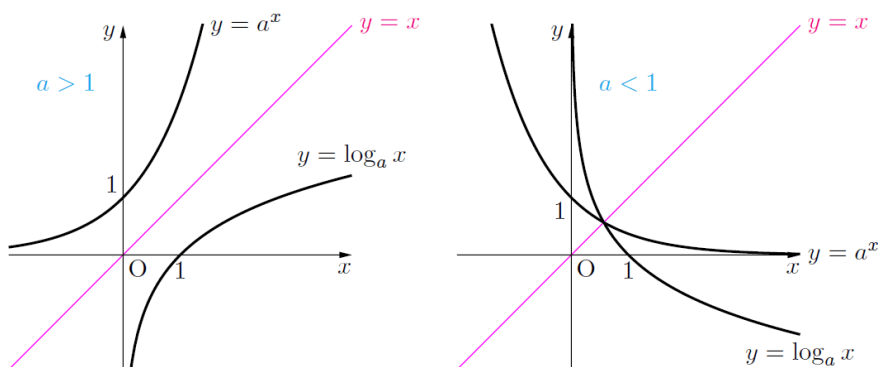
対数関数 a を 1 でない正の定数とすると、関数 $y = \log_a x$ を a を底とする対数関数という。

対数関数 $y = \log_a x$ のグラフ

- 定義域は $x > 0$ (正の実数)
 - 値域は $-\infty < y < \infty$ (全実数)
 - グラフは連続で、点 $(1, 0)$ および点 $(a, 1)$ を通る。
 - グラフは y 軸を漸近線とする。
 - グラフは $a > 1$ のとき単調に増加し、 $0 < a < 1$ のとき単調に減少する。
- (指数関数 $y = a^x$ と $y = x$ に関して対称)



ポイント. 指数関数 $y = a^x$ と対数関数 $y = \log_a x$ は互いに逆数の関係にある。したがって、グラフは直線 $y = x$ に関して対称に對称となる。これを覚えておくと、指数関数と対数関数のグラフが描きやすくなる。



問2. 次の関数のグラフをかけ.

(1) $y = 3^x$

(2) $y = \log_3 x$

(3) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

(4) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$