# 数学補習：講義プリント 13 回目

♣ 指数関数と対数関数の導関数

**定理. (指数関数と対数関数の導関数)** $e$ を自然対数の底，$a$ を 1 以外の正定数とするとき，次の公式が成り立つ。

[1] $(e^x)' = e^x$

[2] $(a^x)' = a^x \log a$

[3] $(\log x)' = \dfrac{1}{x}$

[4] $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \log a}$

[5] $(\,\log|f(x)|\,)' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ ( [3] の一般化)

**定理.(指数関数と対数関数の導関数) の証明.**

(1)
$$
\begin{aligned}
(e^x)' &= \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^x(e^h-1)}{h} \\
&= e^x \lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} \qquad \left(\text{ここで，}t=e^h-1\text{ とすると }h\to 0\text{ のとき }t\to 0\right) \\
&= e^x \lim_{t\to 0}\frac{t}{\log(1+t)} \\
&= e^x \lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{1}{t}\log(1+t)} \\
&= e^x \lim_{t\to 0}\frac{1}{\log(1+t)^{\frac{1}{t}}} = e^x\frac{1}{\log e} \\
&= e^x
\end{aligned}
$$

(2)
$$
\begin{aligned}
(a^x)' &= \left(e^{\log a^x}\right)' = \left(e^{x\log a}\right)' = e^{x\log a}\cdot(x\log a)' = e^{\log a^x}\cdot\log a \\
&= a^x\log a
\end{aligned}
$$

(3) $y=\log x \iff e^y = x$ に注意すると，逆関数の微分法により

$$
(\log x)' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d}{dy}e^y} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}
$$

(4)
$$
(\log_a x)' = \left(\frac{\log x}{\log a}\right)' = \frac{\frac{1}{x}}{\log a} = \frac{1}{x\log a}
$$

問. 次の関数を微分せよ.

(1) $y = e^{3x+2}$　(2) $y = 2^{-x}$　(3) $y = xe^x$　(4) $y = \log 2x$

(5) $y = x^2 \log x$　(6) $y = (\log x)^3$　(7) $y = \log |3x - 2|$　(8) $y = \log |x^2 - x|$

♣ 導関数の応用：その１

**接線の方程式**　曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における接線の方程式は

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

♣ 導関数の応用：その２（関数の極大・極小）

**定理 7.1**　関数 $f(x)$ は区間 $[a, b]$ で連続で，区間 $(a, b)$ で微分可能とする。このとき

$f(x)$ が $[a, b]$ で単調増加（単調減少）　$\Longleftrightarrow$　$(a, b)$ において $f'(x) \geqq 0$　$(f'(x) \leqq 0)$

**定義（極大・極小）**　点 $c$ を含む十分小さい開区間において，任意の $x \neq c$ に対し，

$$f(c) > f(x) \qquad (f(c) < f(x))$$

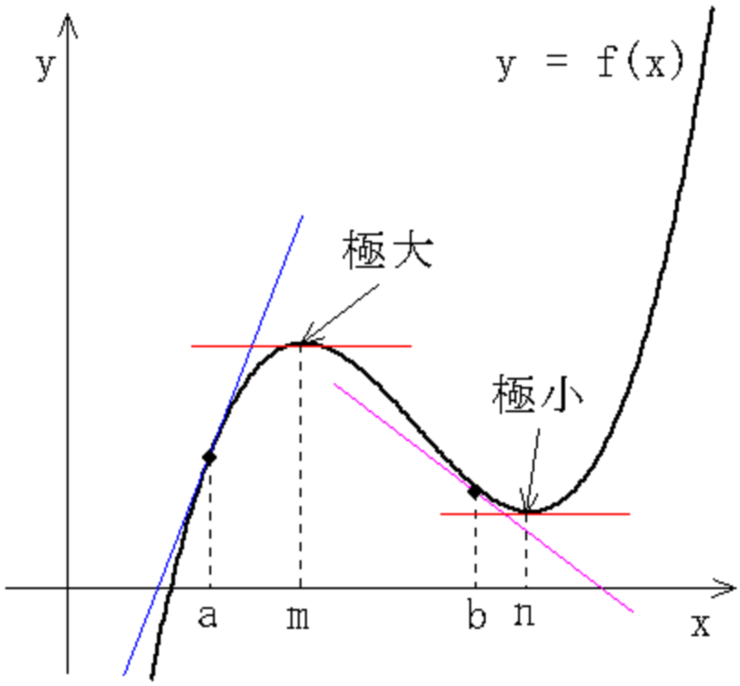
が成り立つならば，$f(x)$ は $x = c$ で**極大（極小）**であるといい，$f(c)$ を**極大値（極小値）**という。極大値と極小値を総称して，**極値**という。

**極値をとるための必要条件**　$f(x)$ が $x = c$ で極値をとるならば，　$f'(c) = 0$

Remark　上記の対偶をとると

$f'(c) = 0$ をみたさない点 $c$ では，$f(x)$ は極値をとらない

**極値の判定法**　$f(x)$ が微分可能で $f'(c) = 0$ であるとき，$x = c$ を境目として $f'(x)$ の符号を調べれば，極値を判定することができる。



**問 2**　曲線 $y=\log x$ 上の点 $(e,1)$ における接線の方程式を求めよ。ただし，$e$ は自然対数の底である。

**問 3**　関数 $f(x)=xe^x$ の極値を求めよ.