数学補習：講義プリント２回目

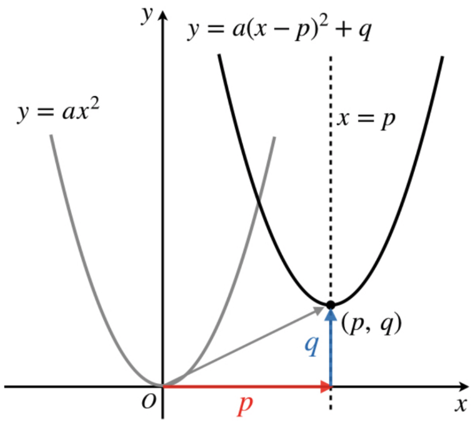
２次関数のグラフ　y が x の２次式 $y = ax^2 + bx + c$ で表される関数を**２次関数**という。２次関数のグラフは**放物線**となる。２次関数 $y = ax^2 + bx + c$ は

$$y = ax^2 + bx + c = a(x - p)^2 + q$$

と変形することができる。右辺を２次式の標準形という。このとき

(1) $y = a(x - p)^2 + q$ のグラフは $y = ax^2$ のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q 平行移動した放物線である。

(2) 軸は $x = p$，頂点の座標は (p, q) である。



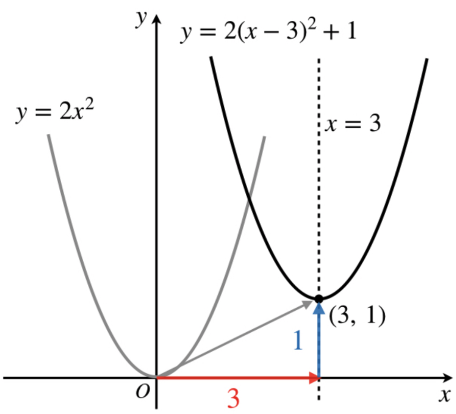
例題 1.　$y = 2(x - 3)^2 + 1$ のグラフをかけ。

解答. $y = 2(x - 3)^2 + 1$ のグラフは，$y = 2x^2$ のグラフを

x 軸方向に 3，y 軸方向に 1 だけ平行移動したグラフ

になる。

また，$y = 2(x - 3)^2 + 1$ のグラフの軸は直線 $x = 3$，頂点の座標は $(3, 1)$ となる。
したがって，求めたい $y = 2(x - 3)^2 + 1$ のグラフは以下のようになる。



□

ポイント　2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフは「$y=a(x-p)^2+q$」の形に変形することで，軸と頂点がわかり，グラフを描くことができる！

平方完成の方法

$$\begin{aligned}
&ax^2+bx+c \\
=\ & a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c && \Longleftarrow\ x^2\ \text{の係数でくくる} \\
=\ & a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)+c && \Longleftarrow\ x\ \text{の係数の半分の 2 乗を加えて引く} \\
=\ & a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\}+c && \Longleftarrow\ \text{かっこの 2 乗の式を作る} \\
=\ & a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c && \Longleftarrow\ \text{中かっこを展開すれば出来上がり}
\end{aligned}$$

例題 2.　$y=2x^2-12x+19$ のグラフをかけ。

解答.　$y=2x^2-12x+19$ を平方完成すると

$$\begin{aligned}
y &= 2x^2-12x+19 \\
&= 2\left(x^2-6x\right)+19 && \Longleftarrow\ x^2\ \text{の係数 2 でくくる} \\
&= 2\left(x^2-6x+(-3)^2-(-3)^2\right)+19 && \Longleftarrow\ x\ \text{の係数の半分の}\ -3\ \text{の 2 乗を加えて引く} \\
&= 2\left\{(x-3)^2-(-3)^2\right\}+19 && \Longleftarrow\ \text{かっこの 2 乗の式を作る} \\
&= 2(x-3)^2-18+19 && \Longleftarrow\ \text{中かっこを展開する} \\
&= 2(x-3)^2+1
\end{aligned}$$

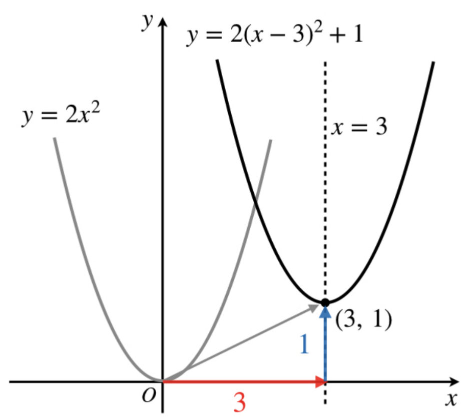
となる。

$y=2(x-3)^2+1$ のグラフは，$y=2x^2$ のグラフを

x 軸方向に 3，y 軸方向に 1 だけ平行移動したグラフ

であり，軸は直線 $x=3$，頂点の座標は $(3,1)$ となる。

したがって，$y=2x^2-12x+19$ のグラフは以下のようになる。



□

問 1. 次の 2 次関数の軸の方程式，頂点の座標を求め，グラフの概形を描け。

(1) $y = x^2 - 4x + 3$

(2) $y = x^2 + 4x + 4$

(3) $y = -2x^2 + 4x + 6$

平方完成の方法

$$
\begin{aligned}
& ax^2 + bx + c \\
= \ & a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\
= \ & a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c \\
= \ & a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\} + c \\
= \ & a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c
\end{aligned}
$$

ポイント　2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフと x 軸との共有点の x 座標は，2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解である。

2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解の公式

2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ の解は

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

である。

ポイント　2 次関数は $y = ax^2 + bx + c$ の係数 a，b，c の値や，軸 $x = p$，頂点の座標 (p, q) などがわかれば，2 次関数の式を決定することができる。

例題 3.　頂点の座標が $(2, 1)$ で，点 $(3, -1)$ を通る 2 次関数を求めよ。

解答. 頂点の座標が $(2, 1)$ であるから，求めたい 2 次関数の式は

$$y = a(x-2)^2 + 1$$

と表せる。これが，点 $(3, -1)$ を通るから，$x = 3$，$y = -1$ を代入すると

$$-1 = a + 1$$

となる。これを解くと，$a = -2$ となる。したがって，求めたい 2 次関数の方程式は

$$\boxed{\text{答}} \quad y = -2(x-2)^2 + 1$$

例題 4.　3 点 $(-1, -2)$，$(1, 6)$，$(2, 7)$ を通る 2 次関数を求めよ。

解答. 求めたい 2 次関数の式 を $y = ax^2 + bx + c$ とする。このとき，$x = -1$，$y = -2$ と，$x = 1$，$y = 6$ と，$x = 2$，$y = 7$ をそれぞれ代入して連立方程式を作ると

$$\begin{aligned} -2 &= a - b + c & (1) \\ 6 &= a + b + c & (2) \\ 7 &= 4a + 2b + c & (3) \end{aligned}$$

となる。

(1)−(2) より

$$\begin{aligned} -8 &= -2b \\ 2b &= 8 \\ b &= 4 & (4) \end{aligned}$$

となる。

次に，(1), (3) にそれぞれ $b = 4$ を代入すると

$$\begin{cases} -2 = a - 4 + c \\ 7 = 4a + 8 + c \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a + c = 2 \\ 4a + c = -1 \end{cases}$$

となる。この連立方程式を解くと

$$a = -1, \quad c = 3 \qquad (5)$$

となる。以上より，求めたい 2 次関数の方程式は

$$\boxed{\text{答}} \quad y = -x^2 + 4x + 3$$