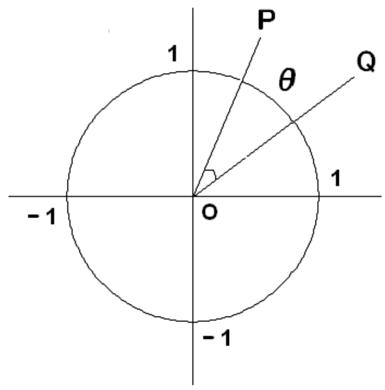
数学補習：講義プリント 4 回目

● 点 O を中心として, 半径 1 の円を考える。2 つの半直線 OP と OQ のなす角の大きさは，半直線が切りとる円弧の長さ θ に比例する。このとき，

$$\angle \mathrm{POQ} = \theta \ \mathrm{rad}\ \text{（ラジアン）}$$

と表す。ここで，rad は角度の単位である。このような角の大きさの表し方を**弧度法**という。通常単位名のラジアンは省略する。

一方，この弧度法に対して，$45°$，$60°$ と表現する方法を度数法という。

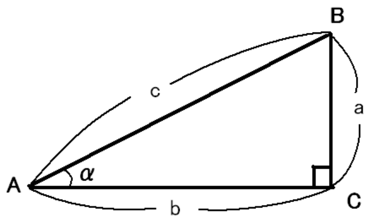


半径 1 の円の円周の長さは，2π であるので，度数法と弧度法には，

$$360° = 2\pi, \qquad 1° = \frac{\pi}{180°}$$

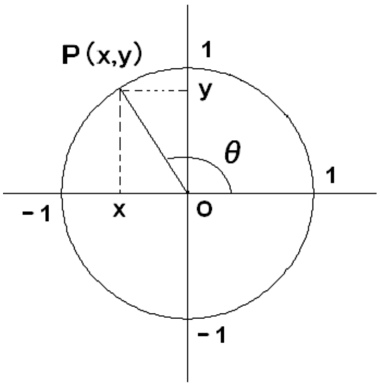
の関係がある。

● 直角三角形 ABC において，**三角比**を次のように定める。



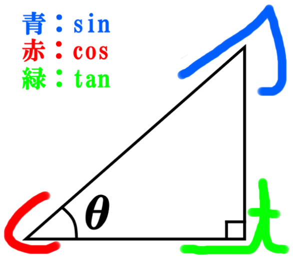
$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c}, \qquad \tan\alpha = \frac{a}{b}$$

● 単位円上の点 $\mathrm{P}(x, y)$ に対して，三角比と同様に，**三角関数**を次のように定める。



$$\sin\theta = y, \qquad \cos\theta = x, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

覚え方のポイント　次のように **三角比** を覚えると良い。



$$\sin\theta = \frac{a}{c}, \qquad \cos\theta = \frac{b}{c}, \qquad \tan\theta = \frac{a}{b}$$

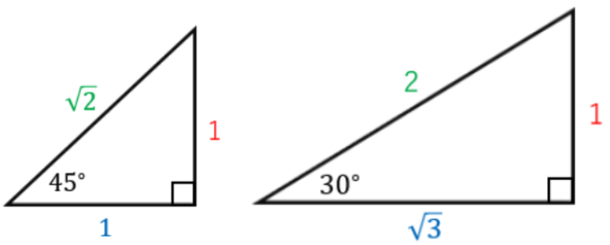
問 1．次の対応表の (ア)〜(イ) にあてはまる数を求めよ．

度数法	0°	30°	(イ)	(ウ)	90°	120°	(カ)	(キ)	180°	270°	360°
孤度法	0	(ア)	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	(エ)	(オ)	$\dfrac{3}{4}\pi$	$\dfrac{5}{6}\pi$	π	(ク)	2π

問 2．θ が次の値のとき，$\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ の値を求めよ．

(1) $\dfrac{\pi}{6}$　　(2) $\dfrac{\pi}{4}$　　(3) $\dfrac{2}{3}\pi$　　(4) $-\dfrac{5}{4}\pi$　　(5) $\dfrac{11}{3}\pi$

ポイント　次の特殊な三角形の三角比を覚えておくと良い。



$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}},\quad \tan 45^\circ = 1$$

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2},\quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},\quad \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},\quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2},\quad \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

- 三角関数に対して，次の性質が成立する。

(1) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$　　(2) $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$　　(3) $\tan^2\theta + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

- **加法定理**　以下の式は複号同順である．

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta,$$
$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}.$$

問 3．次の値を求めよ．

(1) $\sin\dfrac{7}{12}\pi$　　(2) $\cos\dfrac{7}{12}\pi$　　(3) $\sin\dfrac{\pi}{12}$

覚え方のポイント　語呂合わせで，**加法定理**を覚えると良い。

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \underbrace{\sin\alpha\cos\beta}_{\text{咲いたコスモス}} \pm \underbrace{\cos\alpha\sin\beta}_{\text{コスモス咲いた}}$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \underbrace{\cos\alpha\cos\beta}_{\text{コスモスコスモス}} \mp \underbrace{\sin\alpha\sin\beta}_{\text{咲いた咲いた}}$$

ポイント　**加法定理** だけ覚えていればよい！

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta,$$
$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}.$$

（複号同順）

◇ **三角関数の公式**は色々あるが，**加法定理** だけ覚えていればよい！

２倍角の公式

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$$
$$\tan 2\alpha = \tan(\alpha + \alpha) = \frac{\tan\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha\tan\alpha} = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}.$$

また，$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ を利用すると

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = (1 - \sin^2\alpha) - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

や

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$$

となる。これらを変形すると，**半角の公式**をえる。

半角の公式

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \text{ を変形すると，} \quad \sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

となる。同様に

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \text{ を変形すると，} \quad \cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

となる。したがって，$\alpha = \dfrac{\theta}{2}$ とすると，**半角の公式**をえる。

$$\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos\theta}{2}, \qquad \cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos\theta}{2}$$

他にも・・・

$$\sin(-\alpha) = \sin(0 - \alpha) = \sin 0\cos\alpha - \cos 0\sin\alpha = -\sin\alpha$$
$$\sin(\alpha + \pi) = \sin\alpha\cos\pi + \cos\alpha\sin\pi = -\sin\alpha$$
$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\alpha\cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha\sin\frac{\pi}{2} = \cos\alpha$$

などなど，**高校でいろいろ出てきて覚えきれなかった公式がすべて加法定理から得られる！**