数学補習：講義プリント７回目

♣ 微分係数と導関数

定義（微分係数） 関数 $f(x)$ に対し，極限値

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \tag{1}$$

が存在するとき，$f(x)$ は $x=a$ で**微分可能**であるといい，この値を a における**微分係数**とよび $f'(a)$ で表す。

Remark (1) において，$x=a+h$ とおくと，$h\to 0$ のとき $x\to a$ であるので，

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

と書き表せる。

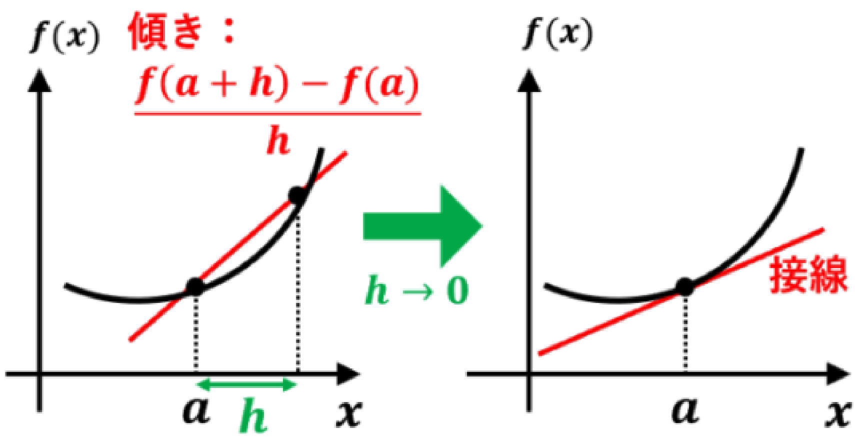
幾何学的な意味 微分係数 $f'(a)$ は曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,f(a))$ における接線の傾きを意味する。従って，この点における接線の方程式は，次のようになる。

$$y=f(a)+f'(a)(x-a)$$

定義（導関数） 関数 $y=f(x)$ が定義域の各点で微分可能であるとき，各点 x に対して，その点での微分係数 $f'(x)$ を対応させる関数を $y=f(x)$ の**導関数**とよび

$$y',\qquad f',\qquad f'(x),\qquad \frac{dy}{dx},\qquad \frac{df}{dx},\qquad \frac{df}{dx}(x),\qquad \frac{df(x)}{dx}$$

などと表す。



例 1.　定義にしたがって，関数 $f(x) = x^2$ の導関数を求めよ。

[解答]

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0}(2x + h) = 2x$$

問 1.　定義にしたがって，次の関数の導関数を求めよ。

(1)　$f(x) = 5x - 7$　　(2)　$f(x) = \dfrac{1}{x}$　　(3)　$f(x) = \sqrt{x}$

基本的な関数の導関数

[1]　$y = x^n$ の導関数は，　$y' = nx^{n-1}$　（n は整数）

[2]　定数関数 $y = c$ の導関数は，　$y' = 0$　（c は整数）

♣ 微分の計算：その１

微分の計算方法　関数 $f(x)$, $g(x)$ が同じ区間で微分可能であるとき，
関数 $\alpha f(x)+\beta g(x)$, 積 $f(x)g(x)$ も同じ区間で微分可能で

$$\{\alpha f(x)+\beta g(x)\}'=\alpha f'(x)+\beta g'(x) \qquad （ただし，\ \alpha,\ \beta \text{ は実数}）$$

$$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

が成り立つ。特に，$g(x)\neq 0$ ならば，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ も同じ区間で微分可能で

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

が成り立つ。

例.　次の関数の導関数を求めよ。

(1) $y=(x^2-1)(2x+3)$　　　(2) $y=\dfrac{2x+3}{x^2+1}$

[解答]

(1)
$$\begin{aligned} y' &= (x^2-1)'(2x+3)+(x^2-1)(2x+3)' \\ &= 2x(2x+3)+(x^2-1)2 \\ &= 6x^2+6x-2 \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} y' &= \frac{(2x+3)'(x^2+1)-(2x+3)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{2(x^2+1)-(2x+3)2x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{2x^2+2-4x^2-6x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{-2x^2-6x+2}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

ポイント　**基本的な関数の導関数は暗記する！**

[1]　$y=x^n$ の導関数は，　$y'=nx^{n-1}$　（n は整数）

[2]　定数関数 $y=c$ の導関数は，　$y'=0$　（c は整数）

問. 次の関数を微分せよ.

(1) $y = 2x^5$

(2) $y = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$

(3) $y = (x^2 - x)(x + 1)$

(4) $y = (2x^3 + 1)(3x^4 - 1)$

(5) $y = \dfrac{2}{2x - 1}$

(6) $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

(7) $y = \dfrac{1}{x^2}$

(8) $y = \dfrac{1}{3x^3}$

(9) $y = x + \dfrac{1}{x}$