数学補習：講義プリント 8 回目

♣ 微分の計算：その 2

合成関数の微分 関数 $y = f(u)$, $u = g(x)$ が微分可能で，$g(x)$ の値域が $f(u)$ の定義域に含まれているとする。このとき，合成関数 $y = f(g(x))$ も微分可能で

$$\{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x) \tag{1}$$

が成り立つ。

Remark $\dfrac{dy}{du} = f'(u) = f'(g(x))$, $\dfrac{du}{dx} = g'(x)$ であるから，(1) は次のように表すこともできる。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

例. 次の関数の導関数を求めよ。

(1) $y = (2x^3 - 1)^4$ (2) $y = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^5$

[解答] (1)

$$\begin{aligned} y' &= \{(2x^3-1)^4\}' \\ &= 4(2x^3-1)^3 \cdot (2x^3-1)' = 4(2x^3-1)^3 \cdot 6x^2 = 24x^2(2x^3-1)^3 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} y' &= \left\{\left(x + \frac{1}{x}\right)^5\right\}' \\ &= 5\left(x + \frac{1}{x}\right)^4 \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right)' = 5\left(x + \frac{1}{x}\right)^4 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \end{aligned}$$

ポイント 外から内へドンドン微分して掛けるイメージ !!

つまり

- カタマリを考えて，外側の関数と中の小さな関数をとらえる
- 外側から微分する

問 1. 次の関数を微分せよ.

(1) $y = (3x+1)^4$ (2) $y = (3-2x^2)^3$ (3) $y = \dfrac{1}{(x^2+1)^3}$

指数の拡張　$a>0$ のとき，自然数 n, 整数 m に対し，

$$a^0=1,\qquad \frac{1}{a^n}=a^{-n},\qquad a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a},\qquad a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$$

と定める。

指数法則　$a>0, b>0$ のとき，実数 $p,\ q$ に対し，次が成り立つ．

(1)　$a^pa^q=a^{p+q}$　　(2)　$\dfrac{a^p}{a^q}=a^{p-q}$　　(3)　$(a^p)^q=a^{pq}$

(4)　$(ab)^p=a^pb^p$　　(5)　$\left(\dfrac{a}{b}\right)^p=\dfrac{a^p}{b^p}$

基本的な関数の導関数

[3]　$y=x^\alpha$ の導関数は，　$y'=\alpha x^{\alpha-1}$　（α は実数）

例.　関数 $y=\sqrt[5]{x}$ の導関数を求めよ。

[**解答**]　関数 $y=\sqrt[5]{x}=x^{\frac{1}{5}}$ なので，導関数は

$$y'=\left(x^{\frac{1}{5}}\right)'=\frac{1}{5}x^{\frac{1}{5}-1}=\frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}\qquad\square$$

問 2. 次の関数を微分せよ.

(1)　$y=\sqrt[4]{x^3}$　　(2)　$y=\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}$　　(3)　$y=\sqrt[3]{x^2+4}$

問 3. 次の関数を微分せよ.

(1) $y = x^{10} + 3x^4 + x - 7$

(2) $y = (3x - 2)(x + 5)$

(3) $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

(4) $y = (x^3 + x)(2x^2 - 1)$

(5) $y = \dfrac{4}{x^2 + 3}$

(6) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

(7) $y = (3x^2 - 2x + 5)^3$

(8) $y = x\sqrt{x^2 + 1}$

(9) $y = \dfrac{1}{(x^2 + 1)^2}$