1 例　不定積分 $\int x(x+1)^4dx$ を求めよ。

$x+1=t$ とおくと　$x=t-1$，$dx=dt$

$\int x(x+1)^4dx=\int(t-1)t^4dt=\int(t^5-t^4)dt=\frac{t^6}{6}-\frac{t^5}{5}+C=\frac{1}{30}t^5(5t-6)+C$

$=\frac{1}{30}(5x-1)(x+1)^5+C$　（C は積分定数）

●次の不定積分を求めよ。

(1) $\int x(x+1)^3dx$

$x+1=t$ とおくと　$x=t-1$，$dx=dt$

$\int x(x+1)^3dx=\int(t-1)t^3dt=\int(t^4-t^3)dt$

$=\frac{t^5}{5}-\frac{t^4}{4}+C$

$=\frac{1}{20}t^4(4t-5)+C$

$=\frac{1}{20}(x+1)^4\{4(x+1)-5\}+C$

$=\frac{1}{20}(4x-1)(x+1)^4+C$

（C は積分定数，以下同じ）

(2) $\int\frac{x}{(x-3)^3}dx$

$x-3=t$ とおくと　$x=t+3$，$dx=dt$

$\int\frac{x}{(x-3)^3}dx=\int\frac{t+3}{t^3}dt$

$=\int\left(\frac{1}{t^2}+\frac{3}{t^3}\right)dt$

$=-\frac{1}{t}-\frac{3}{2t^2}+C$

$=-\frac{2t+3}{2t^2}+C$

$=-\frac{2(x-3)+3}{2(x-3)^2}+C$

$=-\frac{2x-3}{2(x-3)^2}+C$

●次の不定積分を求めよ。

(1) $\int 4x(4x-5)^3dx$

$4x-5=t$ とおくと

$x=\frac{1}{4}t+\frac{5}{4}$，$dx=\frac{1}{4}dt$

$\int 4x(4x-5)^3dx$

$=\int(t+5)t^3\cdot\frac{1}{4}dt=\frac{1}{4}\int(t^4+5t^3)dt$

$=\frac{1}{4}\left(\frac{t^5}{5}+\frac{5}{4}t^4\right)+C=\frac{1}{80}t^4(4t+25)+C$

$=\frac{1}{80}(4x-5)^4\{4(4x-5)+25\}+C$

$=\frac{1}{80}(16x+5)(4x-5)^4+C$

(2) $\int\frac{x+6}{(x-1)^3}dx$

$x-1=t$ とおくと

$x=t+1$，$dx=dt$

$\int\frac{x+6}{(x-1)^3}dx=\int\frac{t+7}{t^3}dt$

$=\int\left(\frac{1}{t^2}+\frac{7}{t^3}\right)dt$

$=-\frac{1}{t}-\frac{7}{2t^2}+C$

$=-\frac{2t+7}{2t^2}+C$

$=-\frac{2(x-1)+7}{2(x-1)^2}+C$

$=-\frac{2x+5}{2(x-1)^2}+C$

2 例　不定積分 $\int x\sqrt{x+2}\,dx$ を求めよ。

$\sqrt{x+2}=t$ とおくと　$x=t^2-2$，$dx=2tdt$

$\int x\sqrt{x+2}\,dx=\int(t^2-2)t\cdot 2tdt=2\int(t^4-2t^2)dt=2\left(\frac{t^5}{5}-\frac{2}{3}t^3\right)+C$

$=\frac{2}{15}t^3(3t^2-10)+C=\frac{2}{15}(3x-4)(x+2)\sqrt{x+2}+C$　（C は積分定数）

●次の不定積分を求めよ。

(1) $\int x\sqrt{x+3}\,dx$

$\sqrt{x+3}=t$ とおくと

$x=t^2-3$，$dx=2tdt$

$\int x\sqrt{x+3}\,dx$

$=\int(t^2-3)t\cdot 2tdt=2\int(t^4-3t^2)dt$

$=2\left(\frac{t^5}{5}-t^3\right)+C=\frac{2}{5}t^3(t^2-5)+C$

$=\frac{2}{5}(x+3)\sqrt{x+3}\{(x+3)-5\}+C$

$=\frac{2}{5}(x+3)(x-2)\sqrt{x+3}+C$

（C は積分定数，以下同じ）

(2) $\int\frac{4x-1}{\sqrt{x+1}}dx$

$\sqrt{x+1}=t$ とおくと

$x=t^2-1$，$dx=2tdt$

$\int\frac{4x-1}{\sqrt{x+1}}dx$

$=\int\frac{4(t^2-1)-1}{t}\cdot 2tdt=2\int(4t^2-5)dt$

$=2\left(\frac{4}{3}t^3-5t\right)+C=\frac{2}{3}t(4t^2-15)+C$

$=\frac{2}{3}\sqrt{x+1}\{4(x+1)-15\}+C$

$=\frac{2}{3}(4x-11)\sqrt{x+1}+C$

●次の不定積分を求めよ。

(1) $\int(x+4)\sqrt{x-5}\,dx$

$\sqrt{x-5}=t$ とおくと

$x=t^2+5$，$dx=2tdt$

$\int(x+4)\sqrt{x-5}\,dx$

$=\int(t^2+9)t\cdot 2tdt=2\int(t^4+9t^2)dt$

$=2\left(\frac{t^5}{5}+3t^3\right)+C=\frac{2}{5}t^3(t^2+15)+C$

$=\frac{2}{5}(x-5)\sqrt{x-5}\{(x-5)+15\}+C$

$=\frac{2}{5}(x-5)(x+10)\sqrt{x-5}+C$

(2) $\int\frac{6x+7}{\sqrt{2x-1}}dx$

$\sqrt{2x-1}=t$ とおくと

$x=\frac{1}{2}(t^2+1)$，$dx=tdt$

$\int\frac{6x+7}{\sqrt{2x-1}}dx$

$=\int\frac{3(t^2+1)+7}{t}\cdot tdt=\int(3t^2+10)dt$

$=t^3+10t+C=t(t^2+10)+C$

$=\sqrt{2x-1}\{(2x-1)+10\}+C$

$=(2x+9)\sqrt{2x-1}+C$

3 ●次の不定積分を求めよ。

(1) $\int 3x^2(x^3+2)^5dx$

$(x^3+2)'=3x^2$ であるから，$x^3+2=u$ とおくと

（与式）$=\int(x^3+2)^5(x^3+2)'dx=\int u^5du$

$=\frac{1}{6}u^6+C=\frac{1}{6}(x^3+2)^6+C$　（C は積分定数，以下同様）

別解　（与式）$=\int(x^3+2)^5(x^3+2)'dx=\frac{1}{6}(x^3+2)^6+C$

(2) $\int x^3e^{x^4}dx$

$(x^4)'=4x^3$ であるから，$x^4=u$ とおくと

（与式）$=\frac{1}{4}\int e^{x^4}(x^4)'dx=\frac{1}{4}\int e^udu$

$=\frac{1}{4}e^u+C=\frac{1}{4}e^{x^4}+C$

別解　（与式）$=\frac{1}{4}\int e^{x^4}(x^4)'dx=\frac{1}{4}e^{x^4}+C$

(3) $\int\frac{(\log x)^2}{x}dx$

$(\log x)'=\frac{1}{x}$ であるから，$\log x=u$ とおくと

（与式）$=\int(\log x)^2(\log x)'dx=\int u^2du$

$=\frac{1}{3}u^3+C=\frac{1}{3}(\log x)^3+C$

別解　（与式）$=\int(\log x)^2(\log x)'dx=\frac{1}{3}(\log x)^3+C$

(4) $\int\cos^4x\sin x\,dx$

$(\cos x)'=-\sin x$ であるから，$\cos x=u$ とおくと

（与式）$=-\int\cos^4x(\cos x)'dx=-\int u^4du$

$=-\frac{1}{5}u^5+C=-\frac{1}{5}\cos^5x+C$

別解　（与式）$=-\int\cos^4x(\cos x)'dx=-\frac{1}{5}\cos^5x+C$

4 ●次の不定積分を求めよ。

(1) $\int 2x(x^2-3)^4dx$

$(x^2-3)'=2x$ であるから，$x^2-3=u$ とおくと

（与式）$=\int(x^2-3)^4(x^2-3)'dx=\int u^4du$

$=\frac{1}{5}u^5+C=\frac{1}{5}(x^2-3)^5+C$　（C は積分定数，以下同様）

別解　（与式）$=\int(x^2-3)^4(x^2-3)'dx=\frac{1}{5}(x^2-3)^5+C$

(2) $\displaystyle\int x^2 e^{x^3} dx$

$(x^3)'=3x^2$ であるから，$x^3=u$ とおくと

$$(\text{与式})=\frac{1}{3}\int e^{x^3}(x^3)'dx=\frac{1}{3}\int e^u du$$

$$=\frac{1}{3}e^u+C=\frac{1}{3}e^{x^3}+C$$

別解　$(\text{与式})=\dfrac{1}{3}\displaystyle\int e^{x^3}(x^3)'dx=\dfrac{1}{3}e^{x^3}+C$

(3) $\displaystyle\int \frac{(\log x)^4}{x}dx$

$(\log x)'=\dfrac{1}{x}$ であるから，$\log x=u$ とおくと

$$(\text{与式})=\int(\log x)^4(\log x)'dx=\int u^4 du$$

$$=\frac{1}{5}u^5+C=\frac{1}{5}(\log x)^5+C$$

別解　$(\text{与式})=\displaystyle\int(\log x)^4(\log x)'dx=\dfrac{1}{5}(\log x)^5+C$

(4) $\displaystyle\int \sin^3 x\cos x\,dx$

$(\sin x)'=\cos x$ であるから，$\sin x=u$ とおくと

$$(\text{与式})=\int\sin^3 x(\sin x)'dx=\int u^3 du$$

$$=\frac{1}{4}u^4+C=\frac{1}{4}\sin^4 x+C$$

別解　$(\text{与式})=\displaystyle\int\sin^3 x(\sin x)'dx=\dfrac{1}{4}\sin^4 x+C$

5 ●次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int\frac{x+1}{\sqrt{1-3x}}dx$

$\sqrt{1-3x}=t$ とおくと，$1-3x=t^2$ から　$x=\dfrac{1-t^2}{3}$，$dx=\left(-\dfrac{2}{3}t\right)dt$

よって

$$(\text{与式})=\int\frac{\frac{1-t^2}{3}+1}{t}\cdot\left(-\frac{2}{3}t\right)dt=\frac{2}{9}\int(t^2-4)dt$$

$$=\frac{2}{9}\left(\frac{1}{3}t^3-4t\right)+C=\frac{2}{27}t(t^2-12)+C$$

$$=\frac{2}{27}\sqrt{1-3x}\{(1-3x)-12\}+C$$

$$=-\frac{2}{27}(3x+11)\sqrt{1-3x}+C$$

(2) $\displaystyle\int\frac{x-1}{e^{x^2-2x}}dx$

$(x^2-2x)'=2x-2$ であるから，$x^2-2x=u$ とおくと

$$(\text{与式})=\frac{1}{2}\int\frac{(x^2-2x)'}{e^{x^2-2x}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{e^u}du=\frac{1}{2}\int e^{-u}du$$

$$=-\frac{1}{2}e^{-u}+C=-\frac{1}{2e^u}+C$$

$$=-\frac{1}{2e^{x^2-2x}}+C$$

(3) $\displaystyle\int\frac{9x-7}{(3x-2)^4}dx$

$3x-2=t$ とおくと　$x=\dfrac{t+2}{3}$，$dx=\dfrac{1}{3}dt$

よって

$$(\text{与式})=\int\left(9\cdot\frac{t+2}{3}-7\right)\frac{1}{t^4}\cdot\frac{1}{3}dt$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{3t-1}{t^4}dt=\frac{1}{3}\int\left(\frac{3}{t^3}-\frac{1}{t^4}\right)dt$$

$$=\frac{1}{3}\left(-\frac{3}{2t^2}+\frac{1}{3t^3}\right)+C$$

$$=\frac{-9t+2}{18t^3}+C=\frac{-9(3x-2)+2}{18(3x-2)^3}+C$$

$$=-\frac{27x-20}{18(3x-2)^3}+C$$

6 ●次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int x\sqrt{x+1}\,dx$

$\sqrt{x+1}=t$ とおくと，$x+1=t^2$ から

$x=t^2-1$，$dx=2tdt$

よって

$$(\text{与式})=\int(t^2-1)t\cdot 2tdt=2\int(t^4-t^2)dt$$

$$=2\left(\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{3}t^3\right)+C=\frac{2}{15}t^3(3t^2-5)+C$$

$$=\frac{2}{15}(x+1)\sqrt{x+1}\{3(x+1)-5\}+C$$

$$=\frac{2}{15}(3x-2)(x+1)\sqrt{x+1}+C$$　（C は積分定数，以下同様）

(2) $\displaystyle\int\frac{2x+1}{\sqrt{x-1}}dx$

$\sqrt{x-1}=t$ とおくと，$x-1=t^2$ から

$x=t^2+1$，$dx=2tdt$

よって

$$(\text{与式})=\int\frac{2(t^2+1)+1}{t}\cdot 2tdt=2\int(2t^2+3)dt$$

$$=2\left(\frac{2}{3}t^3+3t\right)+C=\frac{2}{3}t(2t^2+9)+C$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{x-1}\{2(x-1)+9\}+C$$

$$=\frac{2}{3}(2x+7)\sqrt{x-1}+C$$

(3) $\displaystyle\int\frac{x}{\sqrt{2-x}}dx$

$\sqrt{2-x}=t$ とおくと，$2-x=t^2$ から

$x=2-t^2$，$dx=(-2t)dt$

よって

$$(\text{与式})=\int\frac{2-t^2}{t}\cdot(-2t)dt=2\int(t^2-2)dt$$

$$=2\left(\frac{1}{3}t^3-2t\right)+C=\frac{2}{3}t(t^2-6)+C$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{2-x}\{(2-x)-6\}+C$$

$$=-\frac{2}{3}(x+4)\sqrt{2-x}+C$$

(4) $\displaystyle\int\frac{x^2+x}{\sqrt{2x+1}}dx$

$\sqrt{2x+1}=t$ とおくと　$2x+1=t^2$

よって　$x=\dfrac{t^2-1}{2}$

また $dx=tdt$ であるから

$$(\text{与式})=\int\left\{\left(\frac{t^2-1}{2}\right)^2+\frac{t^2-1}{2}\right\}\cdot\frac{1}{t}\cdot tdt=\int\frac{t^4-1}{4}dt$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}t^5-t\right)+C=\frac{1}{20}t(t^4-5)+C$$

$$=\frac{1}{20}\{(\sqrt{2x+1})^4-5\}\sqrt{2x+1}+C=\frac{1}{5}(x^2+x-1)\sqrt{2x+1}+C$$

（C は積分定数，以下同様）

(5) $\displaystyle\int\frac{e^x}{e^{2x}-9}dx$

$e^x=t$ とおくと　$e^x dx=dt$

$$(\text{与式})=\int\frac{dt}{t^2-9}=\int\frac{dt}{(t+3)(t-3)}$$

$$=\int\frac{1}{6}\left(\frac{1}{t-3}-\frac{1}{t+3}\right)dt=\frac{1}{6}(\log|t-3|-\log|t+3|)+C$$

$$=\frac{1}{6}\log\left|\frac{t-3}{t+3}\right|+C=\frac{1}{6}\log\left|\frac{e^x-3}{e^x+3}\right|+C\ \left(=\frac{1}{6}\log\frac{|e^x-3|}{e^x+3}+C\right)$$